

文章编号: 1000-2022(2006)02-0173-08

中国夏季雨日降水量的概率分布

刘兴华^{1,2}, 吴洪宝¹

(1. 南京信息工程大学 大气科学系, 江苏 南京 210044; 2. 金华市气象局, 浙江 金华 321000)

摘要: 利用全国 174 站夏季逐日降水资料估计了雨日降水量的无条件和有条件概率密度函数, 并递推得各站 1 至 20 d 内最大日降水量的概率分布及 10 d、20 d 内最大日降水量 ≥ 10 mm、 ≥ 25 mm、 ≥ 50 mm 的概率。主要结果是: 在无条件和前一天有雨或无雨条件下雨日降水量 Γ 分布的形状参数 α 都小于 1, 且差别不大, 而绝大部分站无条件下的尺度参数 β 大于前一天无雨条件下的 β_0 而小于前一天有雨条件下的 β_1 ; 无条件和分条件下, 雨日降水量的均值和方差的地理分布都是东南沿海地区大于西北内陆地区, 且绝大部分站无条件下的 μ 、 σ^2 分别大于前一天无雨条件下的 μ_0 、 σ_0^2 而小于前一天有雨条件下的 μ_1 、 σ_1^2 ; Γ 分布能较准确地逼近前一天无雨和前一天有雨两种条件下雨日降水量的样本频率分布, 10 d、20 d 内最大日降水量 ≥ 10 mm、 ≥ 25 mm、 ≥ 50 mm 概率的地理分布, 都是东南沿海地区大于西北内陆地区, 与同样等级的样本频率的地理分布非常接近。广西西部、云南东部一带为高值区, 安徽南部、江西北部一带为次高值区。

关键词: Γ 分布; 雨日; n 天内最大日降水量

中图分类号: P468.024 **文献标识码:** A

Probability Distribution of Summer
Daily Precipitation in ChinaLIU Xue-hua^{1,2}, WU Hong-bao¹

(1. Department of Atmospheric Sciences, NUIST, Nanjing 210044, China; 2. Jinhua Meteorological Bureau, Jinhua 321000, China)

Abstract The unconditional and conditional probability density functions of daily precipitation are estimated by use of the 1961–2000 summer daily precipitation data of 174 stations in China and the probability distributions of maximum daily precipitations and of the maximum daily precipitation greater than or equal to 10 mm, 25 mm, and 50 mm within 10 and 20 days for each station are derived respectively. The main results show that the differences of the Gamma distribution shape parameter α of daily precipitation under no condition, and the condition of a wet/dry preceding day at different stations are not too large and all α are smaller than 1. While the scale parameter β of the Γ distribution, to the overwhelming majority of stations, the unconditional β is greater than the dry preceding day β_0 and less than the wet preceding day β_1 . Both unconditional and conditional μ and σ^2 in the southeast coastal region are greater than those in the northwest inland area and for the overwhelming majority of stations, the unconditional μ are greater

收稿日期: 2004-04-30 改回日期: 2004-07-02

基金项目: “十五”国家重点科技攻关计划“中国气象局数值预报技术创新研究”(2001BA607B)

作者简介: 刘兴华(1977-), 男, 山东滨州人, 硕士, 研究方向: 短期气候预测. E-mail: kh7343@126.com

than the dry preceding day μ_0 and less than the wet preceding day μ_1 , and the same to the variance of Γ distribution. Γ distribution can accurately approximate to the sample frequency distributions of daily precipitation under the conditions of a wet or dry preceding day. The probability distributions of the daily maximum precipitation greater than 10 mm, 25 mm, and 50 mm within 10 days and 20 days in the south-east coastal region are all greater than those in the northwest inland area respectively, approaching to the geographic distributions of the sample frequency of the same rainfall order. The high value area of probability lies in the west of Guangxi and the east of Yunnan, and the secondary high value area in the south of Anhui and the north of Jiangxi.

Key words Γ distribution; rain day; the maximum amount of daily precipitation in n days

0 引言

在夏季, 雨日降水量的概率分布是人们极其关注的一个问题, 尤其是未来若干天内最大日降水量的概率分布。根据其概率分布可对降水预报提供极有价值的信息。关于降水概率模式的拟合, 历来为许多气候学家和统计学家所重视。国外学者很早就研究过一些地区的降水量概率分布型, 特别对 Γ 分布拟合降水量的研究已取得不少成果, 如 Mooly 等^[1-2] 多次将 Γ 分布用于印度雨量及东南亚季风雨量研究, Katz^[3] 提出了一天相关链的日降水随机过程模型。Wks^[4] 将 Weibull 分布用于降水、径流和土壤水分吸收力之间的关系研究。国内也有一些研究成果, 如丁裕国^[5] 基于 Γ 分布研究了降水量概率分布的一种间接模式, 程炳岩等^[6] 研究降水概率模型在旱涝监测评价中的应用, 吴洪宝等^[7] 利用 Γ 分布研究了广西 6、7 月份若干天内最大日降水量的概率分布。

上述研究中, Katz 模型^[3] 假设日降水量的概率分布与其前一天是否有雨相关, 简称一天相关链, 它比独立的随机过程更符合实际情况, 又适合递推 n 天内最大日降水量的概率分布, 而国内对全国范围内利用雨日降水量的概率分布递推出 n 天内最大日降水量的概率分布的研究还没有。本文用该模式估计无条件及分前一天无降水和前一天有降水两种条件下雨日降水量的概率分布及 10 d、20 d 内最大日降水量 ≥ 10 mm、 ≥ 25 mm、 ≥ 50 mm 的概率。

1 方法及资料

寻求各种气候要素概率特征的最佳函数形式 (即理论分布), 以便从理论上揭示气候规律, 并用实际资料获得各种分布参数的最佳估计是气候统计的主要任务之一。随机变量的取值规律最严格的描述是使用概率分布密度函数, 年降水量、海平面气

压、气温等气象要素一般用正态分布密度函数模拟, 而日降水量是明显偏态分布, 采用 Γ 分布密度函数模拟较合适, Γ 分布的概率密度函数为^[8]

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\frac{x}{\beta}), & x > 0 \\ f(x) = 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\alpha > 0$, $\beta > 0$, α 为形状参数, β 为尺度参数。形状参数 α 愈小, 则 Γ 分布愈为正偏。当 $\alpha < 1$ 时曲线为反 J 字型, 概率密度在零附近最大。陡峭程度还与 β 值有关, 即当 α 相差不大而 β 相差很大时, β 愈小, 则 Γ 分布愈为正偏。 Γ 分布的均值、方差与 α 、 β 的关系由下式给出

$$\mu = \beta\alpha \quad (2)$$

$$\sigma^2 = \beta^2\alpha \quad (3)$$

本文主要研究 n d 内最大日降水量的概率分布。为此, 首先应了解雨日降水量的概率分布, 而雨日降水量的概率分布与其前一天是否有雨有关, 所以采用一个双变量的相关链过程 $\{(J_{n-1}, X_n), n = 1, 2, \dots\}$ 描述日降水条件和降水量^[3], 其中

$$J_n = \begin{cases} 1 & \text{当第 } n \text{ d 是雨日 (日降水量 } \geq 0.1 \text{ mm);} \\ 0 & \text{其他。} \end{cases}$$

X_n 是第 n d 的降水量, 双变量写为 (J_{n-1}, X_n) 表示第 n d 的降水量与第 $(n-1)$ d 是否是雨日有关。 J_n 和 X_n 的起始日序号分别为 0 和 1。假设 $J_{n-1} = 0$ 和 $J_{n-1} = 1$ 两种条件下雨日 ($J_n = 1$) 的降水量 X_n 都服从 Γ 分布, 参数分别为 α_0 、 β_0 和 α_1 、 β_1 , 概率密度函数为

$$f_i(x) = \frac{1}{\beta_i \Gamma(\alpha_i)} \left(\frac{x}{\beta_i}\right)^{\alpha_i-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta_i}\right) \quad (4)$$

其中: $x > 0$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $i = 0, 1$ 分别对应于 $J_{n-1} = 0$ 和 $J_{n-1} = 1$ 两种条件, $\Gamma(\alpha_i)$ 是 Γ 函数

$$\Gamma(\alpha_i) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha_i-1} dt \quad (5)$$

由 $f_i(x)$ 可得条件分布函数

$$F_i(x) = P[X_n \leq x | J_{n-1} = i, J_n = 1] = \int_0^x f_i(s) ds$$

(6)

其中: $i=0, 1$, P 表示概率。nd内最大日降水量记为 $\{M_n; n=1, 2, \dots\}$, 则

$$M_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k$$

(7)

M_n 的概率分布函数定义为

$$G_n(x) = P[M_n \leq x]$$

(8)

它的条件分布为

$$G_n(x; i) = P[M_n \leq x | J_0 = i], i = 0, 1$$

(9)

由全概率公式得

$$G_n(x) = P[J_0 = 0]G_n(x; 0) + P[J_0 = 1]G_n(x; 1)$$

(10)

而 $G_n(x; 0)$ 和 $G_n(x; 1)$ 可以从 $n=1, 2, \dots$ 按全概率公式原理递推, 则

$$\begin{cases} G_n(x; 0) = P_{00}G_{n-1}(x; 0) + P_{01}F_0(x)G_{n-1}(x; 1); \\ G_n(x; 1) = P_{10}G_{n-1}(x; 0) + P_{11}F_1(x)G_{n-1}(x; 1). \end{cases}$$

(11)

其中: $P_{00}, P_{01}, P_{10}, P_{11}$ 是转移概率, $p_{ij} = p[J_n = j | J_{n-1} = i], j = 0, 1$. 求得 M_n 的概率分布函数 $G_n(x)$ 后, 可用差分法计算出它的概率密度函数 $g_n(x)$

$$g_n(x) = \frac{G_n\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - G_n\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

(12)

表 1 $\alpha, \beta, \alpha_0, \beta_0$ 和 α_1, β_1 的样本估计

Table 1 Sample estimates of $\alpha, \beta, \alpha_0, \beta_0$ and α_1, β_1

站名	无条件雨日			有条件雨日					
	样本数	α	β	$J_{n-1} = 0, J_n = 1$			$J_{n-1} = 1, J_n = 1$		
				样本数	α_0	β_0	样本数	α_1	β_1
长春	1 688	0.575	16.11	704	0.566	15.23	984	0.573	16.67
沈阳	1 476	0.554	20.66	704	0.580	17.58	772	0.537	23.45
兰州	1 285	0.636	8.76	711	0.624	8.62	574	0.653	8.92
平凉	1 473	0.563	13.24	690	0.571	12.63	783	0.572	13.78
北京	1 435	0.489	24.24	698	0.503	22.09	737	0.477	26.30
临汾	1 244	0.563	15.04	649	0.573	13.19	595	0.558	16.95
成都	1 984	0.495	22.22	765	0.483	20.96	1 219	0.503	22.92
宜宾	1 841	0.510	25.91	756	0.540	28.63	1 085	0.497	23.51
武汉	1 313	0.468	33.49	582	0.472	31.41	731	0.466	35.12
同仁	1 680	0.529	23.26	598	0.541	20.63	1 082	0.526	24.69
南京	1 388	0.501	28.15	597	0.521	24.97	791	0.490	30.58
杭州	1 633	0.551	22.51	565	0.561	19.51	1 068	0.547	24.04
广州	2 050	0.581	24.56	567	0.534	22.63	1 483	0.574	24.97
来宾	1 958	0.528	24.37	582	0.507	22.07	1 376	0.539	25.17

相差很大,说明中国不同地区日降水量概率分布密度的地理差异主要是 β 值之差决定的。再由 (3)、(4) 式可见,雨日降水量的均值和方差的地理差异也主要由 β 值之差决定的。 $\beta_0 < \beta_1$ 说明平均而言首日降水 ($J_{n-1} = 0, J_n = 1$) 的降水量较之连续雨日 ($J_{n-1} = 1, J_n = 1$) 的降水量要小,或者说出现在降水量小的一端的概率更大。

由 β, β_0, β_1 的地理分布 (图略) 可见, β, β_1 的高值区在广西西部、云南东部地区, 中心值分别达 46.36 和 49.26。次高值区在安徽南部、江西北部, 中心值分别达 35.51 和 38.79。 β_0 的高值区由广西西部、云南东部向北延伸至贵州云南北部交界处, 中心值达 31.85。次高值区由安徽南部、江西北部向西延伸至湖北西部地区, 中心值达 24.52。上述说明, 中国夏季连续雨日降水在广西西部、云南东部地区为多雨区, 在安徽南部、江西北部为次多雨区; 而首日雨日降水在广西西部、云南东部至云贵北部交界地区为多雨区, 安徽南部、江西北部至湖北西部一带为次多雨区。 $\mu, \sigma^2, \mu_0, \sigma_0^2, \mu_1, \sigma_1^2$ 的地理分布图 (图略) 与 β, β_0, β_1 的地理分布特点基本一致, 且绝大部分站有 $\mu_0 < \mu < \mu_1, \sigma_0^2 < \sigma^2 < \sigma_1^2$ 。由 $\beta_0 < \beta < \beta_1, \mu_0 < \mu < \mu_1$ 和 $\sigma_0^2 < \sigma^2 < \sigma_1^2$ 可知, 在分条件下的 α, β 更接近实际情况, 为降水预报提供更有意义的信息。

图 1 给出几个代表性站的 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 曲线图 (实心点连线), 为检查它是否与实际情况吻合, 还给出了对应条件下雨日降水量的样本频率曲线 (空心圆连线)。即分别对 $J_{n-1} = 0, J_n = 1$ 和 $J_{n-1} = 1, J_n = 1$ 计算雨日降水量落在 $(0, 5], (5, 10], \dots, (145, 150]$ 区间内次数占样本数的比例, 再除以区间宽度 5.0 变成单位区间内的频率, 即频率密度, 这样可以在数量上与概率密度函数比较。相应地, 计算 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 时的 x 取 2.5, 7.5, ..., 147.5 mm, 依次与样本频率区间相对应。从图 1 可见, 样本频率显然是偏态的, 降水量愈小频率愈高, 试图做正态分布检验和拟合是完全没必要和不合适的。样本频率曲线和 Γ 分布密度曲线都呈反 J 字型, 总的变化是相吻合的。只是在横轴第 1 点上, 即 $x = 2.5$ 或 $(0, 5]$ 区间, Γ 分布密度函数值比样本频率值明显偏小, 这说明 Γ 分布密度函数虽然也反映出了小雨出现的机会多这一规律, 但程度上还不够。在 x 的其他范围, 样本频率与密度函数都比较接近。所以, 总的说来, Γ 分布函数的形式较好地描述了两种条件下雨日降水量的概率分布。

由图 1 还可见, 在雨日降水量约 5~55 mm 范

围内, 样本频率有一些偏离 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 的小振动, 这些振动与样本数有关, 还与统计样本频率的区间划分有关。当区间宽度直接取 1 mm 时, 在这一范围样本频率出现多个零, 但并不表明降水量不能取这些区间的值。所以, 这些振动是样本的随机振动, 当样本数充分大时将得到平滑。用 Γ 分布描述日降水量的条件概率分布, 尽管其参数的估计也受样本数和样本随机振动的影响, 但从图 1 可见, 采用已有的 40 a 观测样本估计出的 Γ 分布密度, 已较好地拟合了样本频率分布, 因而在一定程度上克服了样本的随机振荡对估计最大日降水量概率分布及在 10 d、20 d 内最大日降水量 ≥ 10 mm、 ≥ 25 mm、 ≥ 50 mm 的概率的影响。

3 用 Γ 分布密度函数递推出的 n d 内最大日降水量概率分布

由上述估计得到 Γ 分布密度函数积分、条件分布函数 $F_0(x)$ 和 $F_1(x)$, 再由递推公式算出 n d 内最大日降水量的概率分布, 取 $n = 1, 2, 3, \dots, 20$ d。图 2 是 4 个代表站的 1、10、20 d 内最大日降水量的概率密度 $g_n(x)$ 曲线。当 $n = 1$ 为 1 d 内最大降水量即日降水量。从定义式 (7) 和递推公式可见, 最大日降水量的概率分布包括无雨的情况在内, 而图 1 的 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 是 $J_{n-1} = 0, J_n = 1$ 和 $J_{n-1} = 1, J_n = 1$ 条件下 X_n 的分布, $X_n \geq 0.1$ 是雨日降水量的概率分布密度, 不包括无雨情况, 所以两者不同, 在 x 取值最小值的点上, $g_1(x)$ 大于 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 。10、20 d 内最大日降水量概率密度函数的峰值各站不同, 沈阳分别为 $x = 12.5$ mm 和 $x = 25.0$ mm, 兰州为 $x = 5.0$ mm 和 $x = 10.0$ mm, 广州为 $x = 22.5$ mm 和 $x = 42.5$ mm, 成都为 $x = 17.5$ mm 和 $x = 30.0$ mm。可见, 西北地区 10、20 d 内最大日降水量在较小的值区达最大概率, 且比较集中, 而华南地区在较大值区达最大概率, 且范围较宽, 东北和西南地区介于上述两地区之间。较之 10 d 内, 20 d 内的最大日降水量概率密度一方面向降水量大的一侧偏移, 另一方面, 分布变平坦, 处在不同区间的概率差异变小。这说明, M_n 作为一个随机变量, 随着 n 增大, 它的均值和方差都增大, 方差增大表示随机性增强, 预报变得困难, 这是合理的。

图 3 给出了 10 d、20 d 内最大日降水量 ≥ 10 mm、 ≥ 25 mm、 ≥ 50 mm 概率的地理分布。由图 3 可见, 青藏高原由于站点较少, 图上不显示其概率; 在西北地区由于站点较少且降水较少, 其概率很

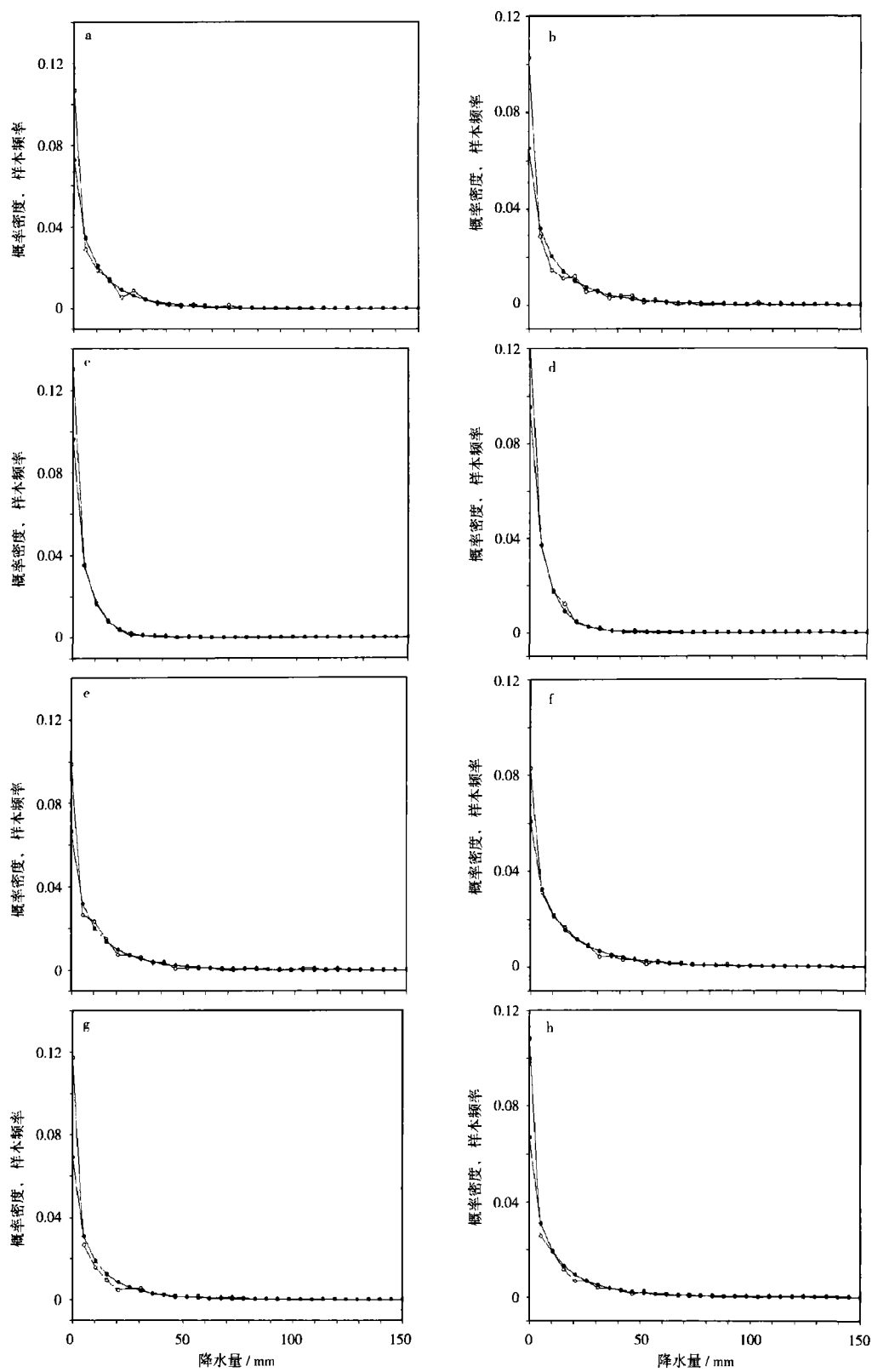


图 1 代表站日降水量条件分布的 Γ 分布密度函数(实心圆连线)和样本频率(空心圆连线; a c e g 分别为沈阳、兰州、广州、成都在雨日的前一天无降水条件下; b d f h 分别为沈阳、兰州、广州、成都在雨日的前一天有降水条件下)

Fig 1 Gamma distribution density functions(solid circle line) and sample frequencies(open circle line) of the daily precipitation of four representative stations under the conditions of a dry preceding day(a c e g) and a wet preceding day(b d f h) for Shenyang Lanzhou, Guangzhou and Chengdu, respectively

小,等值线分布很稀疏。同时可见,各等级降水量概率的地理分布特征基本一致,都是东南沿海地区大于西北内陆地区,与 β 值全国地理分布(图略)推测结果一致;比较10 d、20 d概率分布,同地区20 d内各等级降水量概率明显大于10 d内各等级降水量概率;10 d内最大日降水量 ≥ 10 mm的概率分布高值区在广西西部、云南东部地区,中心值达0.809;次高值区在安徽南部、江西北部,中心值达0.786;20 d内最大日降水量 ≥ 10 mm的概率高值区在贵州省和云南省北部交界处,中心值达0.840;次高值区在安徽南部、江西北部地区,中心值达0.800;10 d内最大日降水量 ≥ 25 mm概率的地理分布高值区在广西西部、云南东部地区,中心值达0.747;次高值区在安徽南部、江西北部,中心值达0.643;20 d内最大日降水量 ≥ 25 mm概率高值区和次高值区与10 d内的相同,两中心值分别达0.748和0.731;10 d内最大日降水量 ≥ 50 mm的概率分布

的高值区在广西西部、云南东部地区,中心值达0.423;次高值区在安徽南部、江西北部地区,中心值达0.278;20 d内最大日降水量 ≥ 50 mm的概率高值区位置与10 d内的相同,中心值达0.559;次高值区较10 d内次高值区略偏北,中心值达0.417。其地理分布特征与 μ_0 、 μ_1 的全国地理分布基本一致,说明广西西部、云南东部地区和安徽南部、江西北部地区夏季降大暴雨的可能性最大。同时利用全国174站40 a夏季逐日降水量资料计算出了10 d、20 d内最大日降水量 ≥ 10 mm、 ≥ 25 mm、 ≥ 50 mm的样本频率,其地理分布(图略)与由 Γ 分布概率密度函数递推得到的概率地理分布基本一致。同样,对于10 d、20 d内最大日降水量 ≥ 50 mm的样本频率分布,广西西部、云南东部地区为高值区,安徽南部、江西北部地区为次高值区,桂滇地区10 d内、20 d内样本频率的中心值分别为0.377和0.503;皖赣地区中心值分别为0.252和0.403;且中心值与概

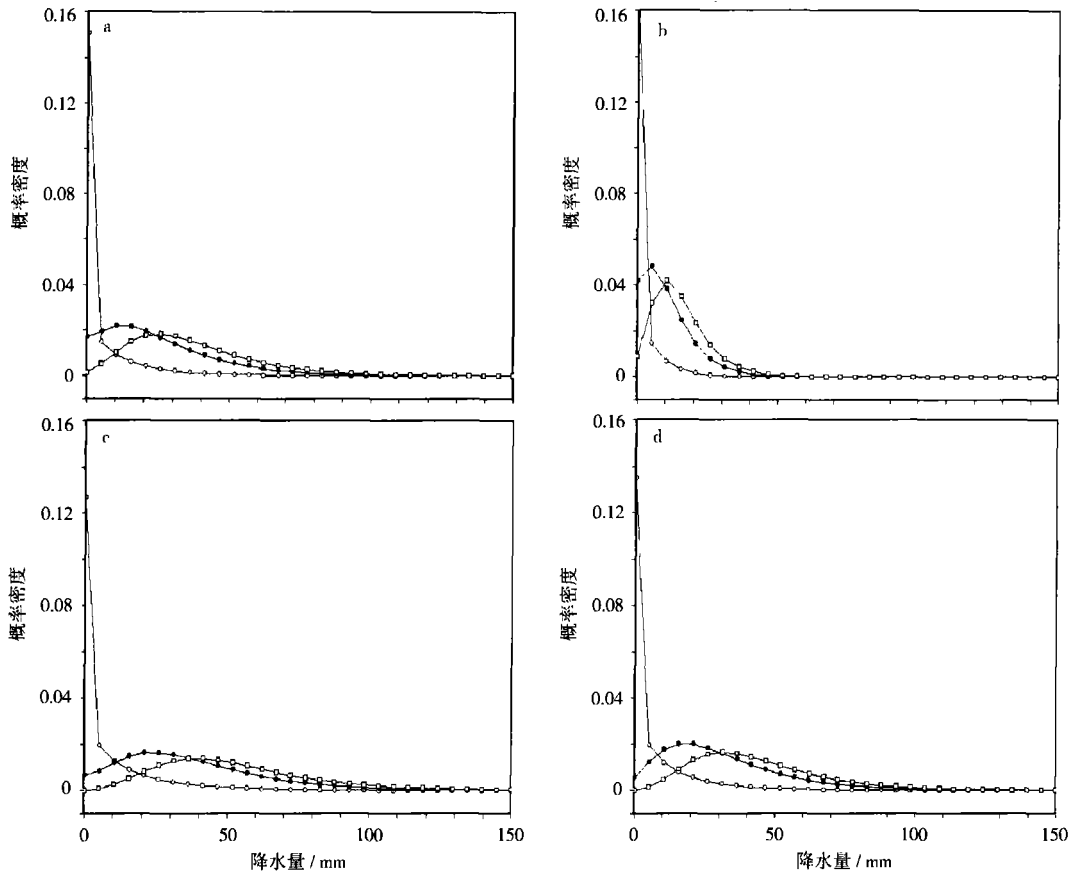


图 2 4个代表站 1 d(空心圆连线)、10 d(实心圆连线)、20 d(方框连线)内最大日降水量的概率密度函数
a 沈阳; h 兰州; c 广州; d 成都

Fig 2 Probability density functions of the maximum daily precipitation within 1(open circle line), 10(solid circle line), and 20(square line) days derived from the Gamma distributions of four representative stations
a Shenyang h Lanzhou c Guangzhou d Chengdu

率中心值分别对应于同一个站(分别为安徽黄山站和广西东兴站)。可见,用 Γ 分布密度函数递推出的 1Q 20 d 内最大日降水量大于一定等级的概率与直接由资料统计出的相应的频率很接近,但是,采用 Γ 分布密度函数所得的结果分布较光滑和规则,显示出了理论描述的优越性。

4 结 论

(1)中国夏季雨日降水量的概率分布明显呈偏态分布,用 Γ 分布能较好地拟合,用 40 a 夏季逐日

降水量资料估计的 Γ 分布密度函数与样本频率非常接近。把雨日降水量分为前一天也是雨日和前一天不是雨日两种情况,分条件下的概率分布比不分条件更符合实际,即日降水量的概率分布与雨日前一天是否有雨有关,较之前一天有降水的雨日,前一天无降水的雨日降水量 Γ 分布的尺度参数更小。说明日降水量小的概率更大。

(2)用 Γ 分布概率密度函数递推得 1 至 20 d 内最大日降水量的概率分布,1 d 降水量概率密度函数呈反 J 字型。1 至 20 d 内随着日数增加,最大日

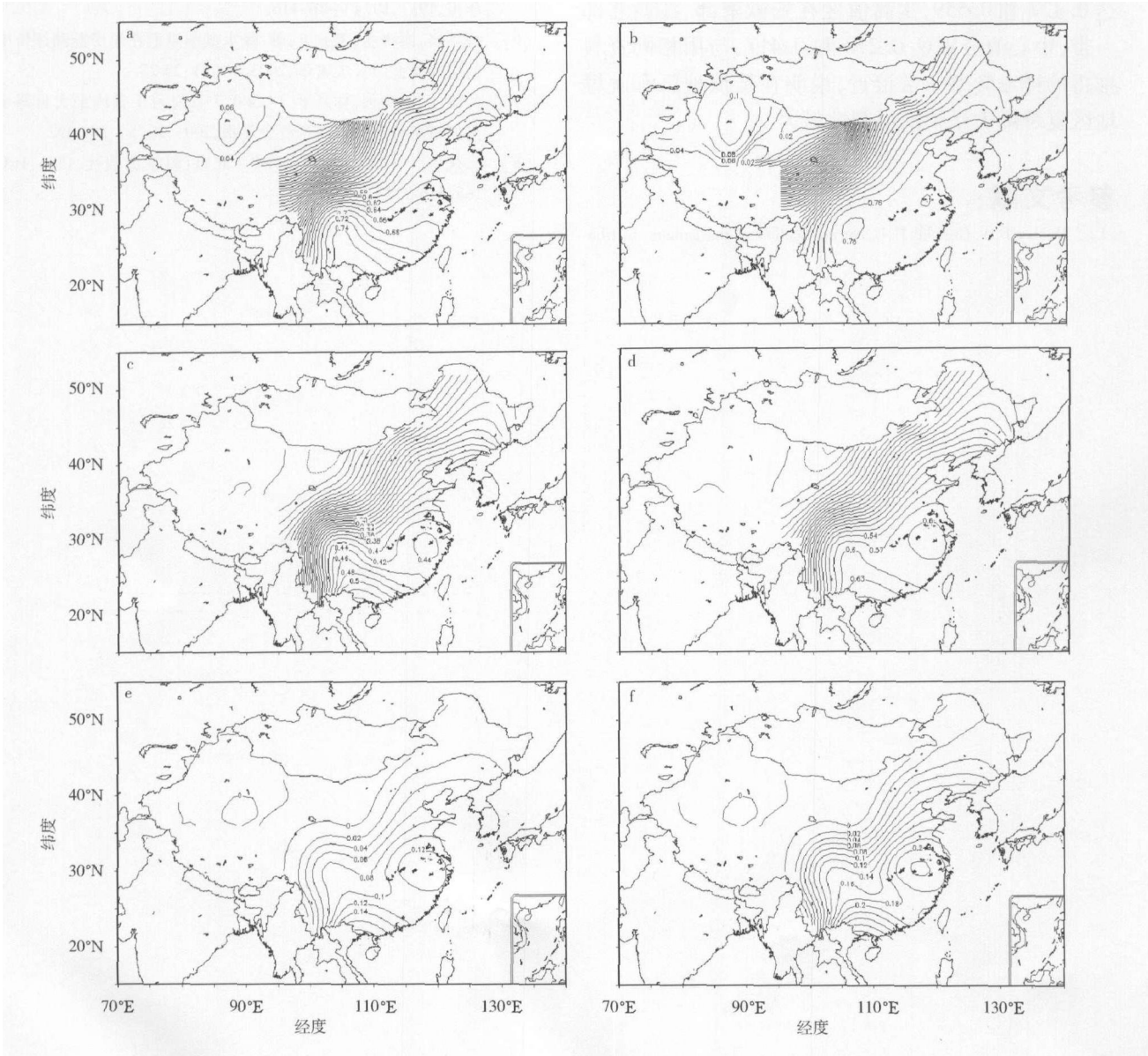


图 3 由 Γ 分布密度函数导出的 1Q 20 d 内最大日降水量大于一定等级的概率
a c e 分别是 10 d 内最大日降水量大于 1Q 25 50 mm 的概率
b d f 分别是 20 d 内最大日降水量大于 1Q 25 50 mm 的概率
Fig 3 Probabilities of the maximum daily precipitation greater than 1Q, 25 and 50 mm with in 10(a c e), and 20(b d f) days derived from Gamma distribution density functions respectively

降水量概率密度大值区向降水量大的一侧偏移,且分布变平坦,处在不同区间内的概率差异变小。比样本频率分布更规则、合理。

(3)用 Γ 分布概率密度函数推得的 10 d、20 d 内最大日降水量 $\geq 10\text{ mm}$ 、 $\geq 25\text{ mm}$ 、 $\geq 50\text{ mm}$ 的概率,其地理分布特征基本一致,都是东南沿海地区大于西北内陆地区,说明 10 d、20 d 内最大日降水量 $\geq 10\text{ mm}$ 、 $\geq 25\text{ mm}$ 、 $\geq 50\text{ mm}$ 的可能性沿海大于内陆。10 d、20 d 内最大日降水量 $\geq 50\text{ mm}$ 概率的地理分布的高值区在广西、云南南部一带,中心值分别达 0.427 和 0.559,次高值区在安徽南部、江西北部一带,中心值分别达 0.278 和 0.417,与用相同资料推得的样本频率非常接近,说明在桂滇地区和皖赣地区夏季降大暴雨的可能性最大。

参考文献:

[1] Mooley D A, Crutche H L. An application of the gamma distribu-

tion function to Indian rainfall[R]. ESSA Technical Report U. S Department of Commerce, Environmental DATA Service, Silver Spring Md, July 1968, 47: 52-58.

[2] Mooley D A. Gamma distribution probability model for Asian summer monsoon monthly rainfall[J]. Mon Wea Rev, 1973, 101(2): 160-176

[3] Katz R. Precipitation as a Chain-dependent process[J]. J Appl Meteor, 1977, 16(7): 671-676

[4] Wilks D S. Rainfall intensity, the Weibull distribution and estimation of daily surface runoff[J]. J Appl Meteor, 1989, 28(1): 52-58.

[5] 丁裕国. 降水量概率分布的一种间接模式[J]. 南京气象学院学报, 1987, 10(4): 407-416

[6] 程炳岩, 谢晓丽, 朱业玉, 等. 降水概率模型在旱涝监测评价中的应用研究[J]. 灾害学, 2003, 18(1): 20-25

[7] 吴洪宝, 王盘兴, 林开平. 广西 6、7 月份若干日内最大日降水量的概率分布[J]. 热带气象学报, 2004, 20(5): 586-592

[8] 么枕生. 气候统计学基础[M]. 北京: 科学出版社, 1984: 161-165; 516-528.