

文章编号: 1000-2022(2002) 04-0472-09

非绝热二维滞弹性流体的动力稳定性

沈新勇¹, 倪允琪², 丁汇³

(1. 南京大学大气科学系, 江苏南京 210093; 2. 中国气象科学研究院, 北京 100081;

3. 国家气候中心, 北京 100081)

摘要: 采用滞弹性近似下的二维流体动力学方程组, 讨论了中尺度对称扰动的动力稳定性, 得到其绝热情况下对称不稳定的判据条件。研究结果表明, 相对于浅对流的情况而言, 深对流情况下对称不稳定的条件更为苛刻一些。在考虑非绝热加热时, 扰动增长率随其波长的变化会产生间断现象。中低层加热明显对中- β 尺度扰动具有激发增长的作用, 并且促使扰动向暖区传播。而中高层加热则具有一定的差异性。

关键词: 对称不稳定; 非绝热加热; 滞弹性近似

中图分类号: P433 **文献标识码:** A

最近几十年来, 作为中纬度温带气旋中带状降水结构以及锋面之前飚线形成的一种可能机制, 有关条件对称不稳定方面的研究已经取得了很大的进展^[1-3]。理论上的分析表明条件对称不稳定纯粹是一种中尺度不稳定, 并且其许多特征都与几种类型雨带的观测事实相互一致^[4-6]。Hoskins 和 Bennetts(1979) 首先得到了无限湿大气和有限湿大气中条件对称不稳定的几种判据形式, 并且提出了锋面雨带形成的三个阶段。Xu^[3] 对此雨带形成的三个阶段做出了修正。需要注意的是以往的研究大部分局限于使用 Boussinesq 近似下动力方程组, 因而只适用于一些浅层的中尺度运动。Ogura 等^[7] 曾经分析一次在 Oklahoma 西部和 Texas 上发展起来的强风暴的可能触发机制, 发现在中低层存在强的垂直风切变, Richardson 数在风暴前的边界层中变得小于 1。观测事实表明, 量级为 $O(1)$ 的 Ri 数通常也只在地面附近小范围区域或急流附近才能观测到, 然而象飚线这样的中尺度环流却几乎贯穿整个对流层, 它的垂直范围比浅层对流大得多, 此时密度随高度分布对运动的影响是必须要考虑的。为此, 本文采用滞弹性近似下的二维流体动力学方程组, 讨论中尺度扰动的对称稳定性, 得到了比较有意义的结果。

1 数学方程组及其简化

在考虑非绝热加热下的 f 平面上非静力平衡大气运动完全方程组为

$$\frac{du}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv, \quad (1)$$

收稿日期: 2000-09-18; 改回日期: 2002-01-14

基金项目: 国家重点基础研究发展规划项目“我国重大天气灾害的机理和预测理论的研究”G1998040907

第一作者简介: 沈新勇(1964-), 男, 江苏兴化人, 博士后, 主要研究方向为 ENSO 及季风动力学、中尺度动力学。

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu, \quad (2)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{dp}{dt} - C_s^2 \frac{d\rho}{dt} = C_s^2 \frac{\rho}{\theta} Q. \quad (5)$$

其中 Q 为非绝热加热项, $C_s = (XRT)^{1/2} = \left[\frac{c_p}{c_v} RT \right]^{1/2}$ 表示了绝热情况下的声速。

假设 $u = \bar{U} + u, v = \bar{v}, w = \bar{w}, p = \bar{P} + p, \rho = \bar{\rho} + \rho, \theta = \bar{\theta} + \theta$, 定义大气基本静力稳定度参数 $N^2 = \frac{g}{\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$, 惯性稳定度参数 $F^2 = f(f - \frac{\partial \bar{U}}{\partial y})$, 斜压稳定度参数 $S^2 = f\bar{U}_z = -\frac{g}{\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}$ (基本场满足热成风平衡)。假定所有物理量关于纬向 x 轴具有对称性 $\left[\frac{\partial}{\partial x} = 0 \right]$, 同时注意到采用滞弹性近似, 即在连续方程中略去密度扰动 ρ 的局地变化项, 而在与非绝热变化有关的热力学方程中仍然保留 $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 项。此外, 近似地取 C_s^2 为常数, 将方程组 (1) ~ (5) 进行线性化处理以后, 可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t}(fu) = F^2 v - S^2 w, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu, \quad (7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho}{\bar{\rho}} g, \quad (8)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} v)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} w)}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - C_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{S^2 C_s^2}{g} \bar{\rho} v + \frac{N^2 C_s^2}{g} \bar{\rho} w = C_s^2 \frac{\bar{\rho}}{\theta} Q. \quad (10)$$

在此线性小扰动方程组中, 已用扰动质量无辐散代替了原来 Boussinesq 流体中的速度无辐散, 垂直运动方程中的密度扰动引起的浮力项是由位温扰动和气压扰动两项组成, 即不仅要考虑由热膨胀效应引起的密度扰动, 还要考虑由压缩性效应所产生的密度扰动。

下面对非绝热加热项 Q 进行对称 Wave-CISK 参数化方案处理^[8]。假定 Q 与边界层顶的扰动垂直速度 $w_{z=z_0}$ 成正比, 即 $Q = \frac{\bar{\theta}}{g} N^2 Q_0 G(z) w_{z=z_0}$, 其中 Q_0 是一常数, 它粗略地正比于大范围积雨云不稳定层结的状况, $G(z)$ 是一给定的垂直加热分布函数。由 (9) 式可见, 引进扰动质量流函数 ψ , 使得 $(\bar{\rho} v, \bar{\rho} w) = \left[-\frac{\partial \psi}{\partial z}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]$, 这样方程组 (6) ~ (10) 就简化成

$$\frac{\partial}{\partial t}(f\bar{\rho} u) = -F^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} - S^2 \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \right] = \frac{\partial p}{\partial y} + f\bar{\rho} u, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - C_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{S^2 C_s^2}{g} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{N^2 C_s^2}{g} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{N^2 C_s^2}{g} Q_0 G(z) \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad z = z_0 \quad (14)$$

在方程组(11)~(14)中,消去变量 f , ρ 和 ρ , 就会得到关于流函数 Ψ 的唯一变量方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial z^2} + \frac{g}{C_s^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right] = -N^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y^2} - 2S^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y \partial z} - F^2 \frac{\partial \Psi}{\partial z^2} - \frac{g}{C_s^2} \left[S^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} + F^2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right] + N^2 Q_0 G(z) \frac{\partial \Psi}{\partial y^2} \quad z = z_0 \quad (15)$$

这个方程在以下两节中要用到。

2 绝热情况下的不稳定判据

在方程(15)中,不考虑凝结潜热加热时,取 $Q_0 = 0$,再令 $\Psi = \Psi(z) e^{i m y + \sigma t}$, 上式就变为关于 $\Psi(z)$ 的常微分方程

$$(\sigma^2 + F^2) \frac{d^2 \Psi}{dz^2} + \left[2imS^2 + \frac{g}{C_s^2} (\sigma^2 + F^2) \right] \frac{d\Psi}{dz} - \left[m^2 (\sigma^2 + N^2) - im \frac{g}{C_s^2} S^2 \right] \Psi = 0 \quad (16)$$

为了消去一阶微分项,作变换 $\Psi = \Phi(z) e^{\mu z}$, 其中 $\mu = - [2imS^2 + \frac{g}{C_s^2} (\sigma^2 + F^2)] / [2(\sigma^2 + F^2)]$, (16)式即化为

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} + (\gamma - \mu^2) \Phi = 0 \quad (17)$$

这里 $\gamma = - \left[m^2 (\sigma^2 + N^2) - im \frac{g}{C_s^2} S^2 \right] / (\sigma^2 + F^2)$, 再令 $\Phi = E \sin \frac{n\pi}{H} z$, 则会得到扰动频散关系

$$\left[1 + \alpha + \frac{\alpha g^2}{4m^2 C_s^4} \right] \sigma^4 + \left[(2 + \alpha) F^2 + \alpha N^2 + \frac{\alpha g^2}{2m^2 C_s^4} F^2 \right] \sigma^2 + \alpha (N^2 F^2 - S^4) + \left(1 + \frac{\alpha g^2}{4m^2 C_s^4} \right) F^4 = 0 \quad (18)$$

其中 $\alpha = \left(\frac{mH}{n\pi} \right)^2$, 表示高、宽比参数。分析此式可以求出方程的根 σ , 要使得扰动增长率 σ 为实数 ($\sigma > 0$), 就必须满足如下条件

$$\alpha (N^2 F^2 - S^4) + \left[1 + \frac{\alpha g^2}{4m^2 C_s^4} \right] F^4 > 0 \quad (19)$$

此不稳定的判据还可以表示成另一种形式

$$Ri < (Ri)_c = \frac{f}{\bar{\eta}} - n^2 \frac{\bar{\eta}}{f} \left[1 + \frac{\alpha g^2}{4m^2 C_s^4} \right] \left(\frac{L}{L_0} \right)^2 \quad (20)$$

这里 $Ri = N^2 / (\bar{U}_z)^2$ 为 Richardson 数, $\bar{\eta} = f - \bar{U}_y$ 为平均场绝对涡度, $L_0 = \bar{U}_z H / f$ 是热成风的惯性圆半径, L 为扰动半波长。在(19)~(20)两式中可以看出,当绝热声速 C_s 时,就退化为浅层对流下的不稳定条件,亦即 Boussinesq 近似下的不稳定情况是滞弹性近似下的特例。此外,再通过分析可知,由于在深层对流中必须要考虑压缩性效应引起的密度扰动,采用滞弹性近似动力学方程组, $C_s \rightarrow \infty$, 从而使得(19)式更难于得到满足;并且由于 $C_s \rightarrow \infty$, 在(20)式中的临界 Richardson 数有所缩小,亦即相对于浅对流的情况而言,深对流情况下对称不稳定的条件更为苛刻一些,从而它发生的频率也应当小一些。

3 非绝热情况下扰动增长谱的间断

在考虑凝结潜热加热时,扰动质量流函数方程即为(15)式,此时令 $\Psi = \Psi(z) e^{i m y + \sigma t}$, 得到关

于 $\Psi(z)$ 的常微分方程

$$(\sigma^2 + F^2) \frac{d^2\Psi}{dz^2} + \left[2imS^2 + \frac{g}{C_s^2}(\sigma^2 + F^2) \right] \frac{d\Psi}{dz} - \left[m^2(\sigma^2 + N^2) - im \frac{g}{C_s^2} S^2 \right] \Psi = - m^2 N^2 Q_0 \Psi(z_0) G(z). \quad (21)$$

记 $A = \sigma^2 + F^2$, $B = 2imS^2 + \frac{g}{C_s^2}(\sigma^2 + F^2)$, $C = -m^2(\sigma^2 + N^2) + im \frac{g}{C_s^2} S^2$, $\lambda^2 = \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2}$ 。方程(21)对应的齐次方程解就为

$$\Psi = (E_1 \sin(\lambda z) + E_2 \cos(\lambda z)) e^{-\frac{B}{2A}z}. \quad (22)$$

其中 E_1 和 E_2 为待定常数, 由边界条件所决定。下面就垂直加热分布函数取为两种不同形式来分别加以讨论。

(1) 将 $G(z)$ 取为常数, 即 $G(z) = G(z_0) = \sin \frac{\pi}{H} z_0 =$ 常数, 表示在整个对流层中各个高度上的加热强度都相同。此时方程(21)对应的非齐次特解就为

$$\Psi = - \frac{1}{C} m^2 N^2 Q_0 G(z_0) \Psi(z_0) \triangleq a \Psi(z_0). \quad (23)$$

所以方程(21)的总体合成解就由(22) ~ (23) 给出

$$\Psi = (E_1 \sin(\lambda z) + E_2 \cos(\lambda z)) e^{-\frac{B}{2A}z} + a \Psi(z_0). \quad (24)$$

将上式代入边界条件 $\Psi_{z=0, H} = 0$, 再定出常数 E_1 和 E_2

$$E_1 = (\operatorname{actg}(\lambda H) - \frac{a}{\sin(\lambda H)} e^{\frac{B}{2A}H}) \Psi(z_0), \quad (25)$$

$$E_2 = - a \Psi(z_0). \quad (26)$$

再把 E_1 和 E_2 的表达式(25) ~ (26) 代入到(24)式中, 并且在(24)式两边同时取 $z = z_0$, 消去 $\Psi(z_0)$, 即得到扰动频散关系

$$\left[\frac{1}{a} - 1 \right] \sin(\lambda H) e^{\frac{B}{2A}H} = \left[\cos(\lambda H) - e^{-\frac{B}{2A}H} \right] \sin(\lambda z_0) - \sin(\lambda H) \cos(\lambda z_0). \quad (27)$$

分析此式可见, 无法求解出扰动增长率 σ 的显示表达式。但是在绝热情况下, $Q_0 = 0$ 时, $a = 0$, 从而 $\sin(\lambda H) = 0$, $\lambda H = n\pi$, 此时就会退化为第 2 节中的情况, 这在前面已经有所讨论。

(2) 将垂直加热分布函数取为两个不同周期的正弦函数之迭加, 即具有如下形式

$$G(z) = G_1 \sin \frac{n_1 \pi}{H} z + G_2 \sin \frac{n_2 \pi}{H} z. \quad (28)$$

其中 G_1, G_2 为给定的常数, n_1, n_2 为正整数。可以通过调节这些参数值, 使得对流凝结加热的峰值高度有所不同。一般而言, 分为高、中、低三个层次的加热强度达到最大。

此时, 方程(21)对应的非齐次特解

$$\Psi = E_3 \sin \frac{n_1 \pi}{H} z + E_4 \cos \frac{n_1 \pi}{H} z + E_5 \sin \frac{n_2 \pi}{H} z + E_6 \cos \frac{n_2 \pi}{H} z. \quad (29)$$

其中 E_3, E_4, E_5, E_6 由以下方程组所决定

$$\left[C - A \left(\frac{n_1 \pi}{H} \right)^2 \right] E_3 - B \frac{n_1 \pi}{H} E_4 = - m^2 N^2 Q_0 G_1 \Psi(z_0), \quad (30)$$

$$B \frac{n_1 \pi}{H} E_3 + \left[C - A \left(\frac{n_1 \pi}{H} \right)^2 \right] E_4 = 0, \quad (31)$$

$$\left[C - A \left(\frac{n_2 \pi}{H} \right)^2 \right] E_5 - B \frac{n_2 \pi}{H} E_6 = - m^2 N^2 Q_0 G_2 \Psi(z_0), \quad (32)$$

$$B \frac{n_2 \pi}{H} E_5 + \left[C - A \left(\frac{n_2 \pi}{H} \right)^2 \right] E_6 = 0. \quad (33)$$

由(30) ~ (33)可解出

$$E_3 = a_1 \Psi(z_0), \quad (34)$$

$$E_4 = a_2 \Psi(z_0), \quad (35)$$

$$E_5 = a_3 \Psi(z_0), \quad (36)$$

$$E_6 = a_4 \Psi(z_0). \quad (37)$$

所以方程(21)的总体解就由(22)、(29)得出

$$\begin{aligned} \Psi = & (E_1 \sin(\lambda z) + E_2 \cos(\lambda z)) e^{-\frac{B}{2A}z} + E_3 \sin \frac{n_1 \pi}{H} z + E_4 \cos \frac{n_1 \pi}{H} z + \\ & E_5 \sin \frac{n_2 \pi}{H} z + E_6 \cos \frac{n_2 \pi}{H} z. \end{aligned} \quad (38)$$

再将(38)代入边界条件 $\Psi_{z=0,H} = 0$, 就有

$$E_2 + E_4 + E_6 = 0, \quad (39)$$

$$(E_1 \sin(\lambda H) + E_2 \cos(\lambda H)) e^{-\frac{B}{2A}H} + E_4 \cos(n_1 \pi) + E_6 \cos(n_2 \pi) = 0. \quad (40)$$

将(35)、(37)代入(39)、(40)中, 从(39)、(40)解得

$$E_1 = \left[(a_2 + a_4) \operatorname{ctg}(\lambda H) - (a_2 \cos(n_1 \pi) + a_4 \cos(n_2 \pi)) \frac{1}{\sin(\lambda H)} e^{\frac{B}{2A}H} \right] \Psi(z_0), \quad (41)$$

$$E_2 = - (a_2 + a_4) \Psi(z_0). \quad (42)$$

再把(41)、(42)、(34) ~ (37)代入到(38)式, 在(38)两边同时取 $z = z_0$, 消去 $\Psi(z_0)$, 就会得到频散关系

$$\begin{aligned} \sin(\lambda H) = & \left\{ [(a_2 + a_4) \cos(\lambda H) - (a_2 \cos(n_1 \pi) + a_4 \cos(n_2 \pi)) e^{\frac{B}{2A}H}] \sin(\lambda z_0) - \right. \\ & \left. (a_2 + a_4) \sin(\lambda H) \cos(\lambda z_0) \right\} e^{-\frac{B}{2A}z_0} + \sin(\lambda H) \left(a_1 \sin \frac{n_1 \pi}{H} z_0 + \right. \\ & \left. a_2 \cos \frac{n_1 \pi}{H} z_0 + a_3 \sin \frac{n_2 \pi}{H} z_0 + a_4 \cos \frac{n_2 \pi}{H} z_0 \right). \end{aligned} \quad (43)$$

注意到上式中参数 $\lambda, a_1, a_2, a_3, a_4, A, B$ 均包含有 σ , 故(43)式无法求出 σ 的显示表达式。不过它在 $Q_0 = 0$ 或者 $z_0 = 0$ 的情况下, 由(30) ~ (37)可见, $a_1, a_2, a_3, a_4 = 0, \sin(\lambda H) = 0, \lambda H = n\pi$, 就退化为绝热的情况。

为了求出 σ 的显示表达式, 更清楚地讨论凝结潜热加热下不稳定增长谱的特征, 下面考虑弱加热的情况, 即假定 $0 < Q_0 \ll 1$, 取 $\epsilon = (Q_0)^{1/2}$, 此时再将(21)式中的未知函数 $\Psi(z)$ 以及 σ 均按照 ϵ 进行级数展开

$$\Psi = \Psi_0(z) + \epsilon \Psi_1(z) + \epsilon^2 \Psi_2(z) + \dots, \quad (44)$$

$$\sigma = \sigma_0 + \epsilon \sigma_1 + \epsilon^2 \sigma_2 + \dots. \quad (45)$$

把(44)、(45)两式代入到(21)中, 则得到 $O(\epsilon^0)$ 、 $O(\epsilon^1)$ 、..... 各阶近似方程。

$O(\epsilon^0)$ 问题:

$$L(\Psi_0) = A_0 \frac{d^2 \Psi_0}{dz^2} + B_0 \frac{d \Psi_0}{dz} + C_0 \Psi_0 = 0. \quad (46)$$

这里 L 定义为特殊算子。

$O(\epsilon^1)$ 问题:

$$L(\Psi_1) = A_0 \frac{d^2 \Psi_1}{dz^2} + B_0 \frac{d \Psi_1}{dz} + C_0 \Psi_1 = 0. \quad (47)$$

$O(\epsilon^2)$ 问题:

$$\begin{aligned} L(\Psi_2) &= A_0 \frac{d^2 \Psi_2}{dz^2} + B_0 \frac{d \Psi_2}{dz} + C_0 \Psi_2 \\ &= -A_2 \frac{d^2 \Psi_0}{dz^2} - B_2 \frac{d \Psi_0}{dz} - C_2 \Psi_0 - m^2 N^2 \Psi_0(z_0) \left[G_1 \sin \frac{n_1 \pi}{H} z + G_2 \sin \frac{n_2 \pi}{H} z \right]. \end{aligned} \quad (48)$$

在 (46) ~ (48) 式中已经取 $\sigma_0 = 0$ 。各个参数 $A_0 = F^2$, $B_0 = 2imS^2 + \frac{g}{C_s^2} F^2$, $C_0 = -m^2 N^2 + im \frac{g}{C_s^2} S^2$, $A_2 = \sigma_1^2$, $B_2 = \frac{g}{C_s^2} \sigma_1^2$, $C_2 = -m^2 \sigma_1^2$ 。方程 (46) 在边界条件 $\Psi_0|_{z=0,H} = 0$ 下的解为

$$\Psi_0 = E \sin(b_1 z) e^{b_2 z}. \quad (49)$$

其中, E 为一个给定的常数, $b_1 = \left[\frac{C_0}{A_0} - \frac{B_0^2}{4A_0^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{n\pi}{H}$, 表示在 $\sigma_0 = 0$ 时的频散关系, 亦即从 (18) 式可以看出, 各个基本场稳定度参数满足关系式 $\alpha(N^2 F^2 - S^4) + \left[1 + \frac{\alpha g^2}{4m^2 C_s^4} \right] F^4 = 0$, 而 $b_2 = -\frac{B_0}{2A_0} = -\frac{g}{2C_s^2} - im \frac{S^2}{F^2}$ 。将 (49) 代入到 (48) 式的右端, 则 (48) 式变为

$$\begin{aligned} L(\Psi_2) &= A_0 \frac{d^2 \Psi_2}{dz^2} + B_0 \frac{d \Psi_2}{dz} + C_0 \Psi_2 \\ &= [-A_2(b_2^2 - b_1^2) - B_2 b_2 - C_2] E \sin(b_1 z) e^{b_2 z} + (-2A_2 b_1 b_2 - B_2 b_1) E \cos(b_1 z) e^{b_2 z} - \\ &\quad m^2 N^2 \Psi_0(z_0) \left[G_1 \sin \frac{n_1 \pi}{H} z + G_2 \sin \frac{n_2 \pi}{H} z \right]. \end{aligned} \quad (50)$$

通过待定系数法, 方程 (50) 的解为

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= E_1 \sin(b_1 z) e^{b_2 z} + E_2 \cos(b_1 z) e^{b_2 z} + E_3 z \sin(b_1 z) e^{b_2 z} + E_4 z \cos(b_1 z) e^{b_2 z} + \\ &\quad E_5 \sin \frac{n_1 \pi}{H} z + E_6 \cos \frac{n_1 \pi}{H} z + E_7 \sin \frac{n_2 \pi}{H} z + E_8 \cos \frac{n_2 \pi}{H} z. \end{aligned} \quad (51)$$

其中 E_1, E_2 为待定常数。

$$E_3 = d_1 \sigma_1^2 E, \quad (52)$$

$$d_1 = -\frac{b_2}{A_0} - \frac{g}{2A_0 C_s^2}, \quad (53)$$

$$E_4 = d_2 \sigma_1^2 E, \quad (54)$$

$$d_2 = -\frac{b_1^2 - b_2^2 + m^2}{2A_0 b_1} + \frac{g b_2}{2A_0 C_s^2 b_1}. \quad (55)$$

而常数 E_5, E_6, E_7, E_8 由以下方程组所决定

$$\left[C_0 - A_0 \left(\frac{n_1 \pi}{H} \right)^2 \right] E_5 - B_0 \frac{n_1 \pi}{H} E_6 = -m^2 N^2 E G_1 \sin(b_1 z_0) e^{b_2 z_0}, \quad (56)$$

$$B_0 \frac{n_1 \pi}{H} E_5 + \left[C_0 - A_0 \left(\frac{n_1 \pi}{H} \right)^2 \right] E_6 = 0, \quad (57)$$

$$\left[C_0 - A_0 \left(\frac{n_2 \pi}{H} \right)^2 \right] E_7 - B_0 \frac{n_2 \pi}{H} E_8 = -m^2 N^2 E G_2 \sin(b_1 z_0) e^{b_2 z_0}, \quad (58)$$

$$B_0 \frac{n_2 \pi}{H} E_7 + \left[C_0 - A_0 \left(\frac{n_2 \pi}{H} \right)^2 \right] E_8 = 0. \quad (59)$$

从(56)~(59)解得

$$E_5 = d_3 E, \quad (60)$$

$$E_6 = d_4 E, \quad (61)$$

$$E_7 = d_5 E, \quad (62)$$

$$E_8 = d_6 E. \quad (63)$$

采用边界条件 $\Psi|_{z=0, H} = 0$, 由(51)式得到

$$E_2 + E_6 + E_8 = 0, \quad (64)$$

$$E_2 \cos(n\pi) e^{b_2 H} + E_4 H \cos(n\pi) e^{b_2 H} + E_6 \cos(n_1 \pi) + E_8 \cos(n_2 \pi) = 0. \quad (65)$$

再由(64)、(65)两式消去 E_2 , 将(54)、(61)、(63)代入其中, 则得到 σ_1 的频散关系

$$\sigma_1^2 = \frac{d_4 + d_6}{d_2 H} - \frac{d_4 \cos(n_1 \pi) + d_6 \cos(n_2 \pi)}{d_2 H \cos(n\pi)} e^{-b_2 H}. \quad (66)$$

其中,

$$d_4 = \frac{m^2 N^2 G_1 \sin(b_1 z_0) e^{b_2 z_0} B_0 \frac{n_1 \pi}{H}}{\left[C_0 - A_0 \left(\frac{n_1 \pi}{H} \right)^2 \right]^2 + \left[B_0 \frac{n_1 \pi}{H} \right]^2}, \quad d_6 = \frac{m^2 N^2 G_2 \sin(b_1 z_0) e^{b_2 z_0} B_0 \frac{n_2 \pi}{H}}{\left[C_0 - A_0 \left(\frac{n_2 \pi}{H} \right)^2 \right]^2 + \left[B_0 \frac{n_2 \pi}{H} \right]^2}.$$

取参数 $N^2 = 8.0 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}$, $f = 0.9 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $F^2 = f^2 = 0.81 \times 10^{-8} \text{ s}^{-2}$, $\bar{T} = 273 \text{ K}$, $X = 1.4$, $R = 287 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$, $n = 1$, $H = 10 \text{ km} = 10^4 \text{ m}$, $z_0 = 1500 \text{ m}$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $G_1 = 1.0$ 。按照 G_2 的取值不同, 分为三种情况进行讨论。 G_2 分别取 -0.5 、 0.0 、 0.5 对应于高、中、低三个层次的加热强度达到最大峰值。 G_2 取 -0.5 时, 中高层加热较大, 加热廓线的极大值在中高层大约 7 km 处; G_2 取 0.0 时, 表示中层 5 km 处加热最大; G_2 取 0.5 时, 中低层加热较大, 加热廓线的极大值在中低层大约 3 km 处。图 1 和图 2 分别表示了这三种情况下频率 σ_1 的实部(σ_1)_r、虚部(σ_1)_i 随扰动半波长的变化情况。

从图 1 中可见, 在考虑凝结潜热加热时, 扰动增长率随其波长的变化会产生间断现象。在充分缩小计算格距绘图时可以发现, 在图中曲线出现“尖点”的地方都会产生间断, 但是间断的激烈程度有所不同。中低层加热明显对中- β 尺度扰动具有激发增长的作用, 并且在某一个波长处(此处称为“最优波长”。在本文所选的参数情况下, 最优波长大约为 230 km), 扰动能够最优发展起来, 产生合适的中- β 尺度扰动不稳定现象。而中高层加热则对中- β 尺度扰动起到限制和衰减的作用(由于 σ_1 的实部在此种情形下, 大都为负值)。至于中层加热出现峰值时, 则几乎对中- β 扰动的发展或衰减没有影响。而对于波长 $L > 300 \text{ km}$ 的扰动, 按照 Thunis 和 Bornstein(1996)^[9] 的分类方法, 属于大- \mathcal{N} 以上尺度的范围, 各个层次的加热都基本上对扰动起到较大的衰减作用。

另外由图 2 见, 无论是低层还是高层加热强度达到最大峰值的情况, 在中- β 尺度范围内都促使扰动向暖区传播(σ_1 的虚部为正值)。而中层加热最大时, 对扰动的传播没有多大影响。对于波长 $L > 300 \text{ km}$ 的大- \mathcal{N} 尺度扰动, 各个层次的加热都驱使扰动向暖区传播, 即向南传播。

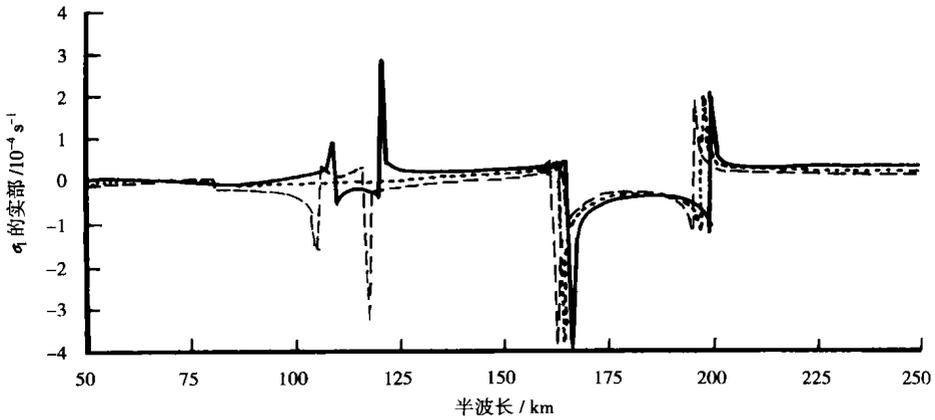


图 1 扰动增长率(σ_1)_r 随半波长的变化(实线: $G_2=0.5$, 点线: $G_2=0$, 虚线: $G_2=-0.5$)

Fig. 1 Growth rate of disturbance varying with semi-wavelength

(The solid curve means the change when $G_2=0.5$,

the dotted curve means that when $G_2=0$ and the dashed curve means one when $G_2=-0.5$)

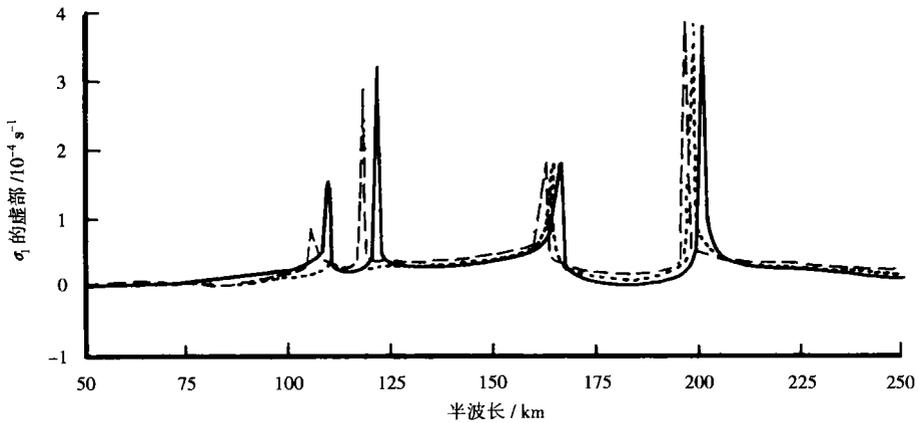


图 2 σ_1 虚部(σ_1)_i 随扰动半波长的变化(实线: $G_2=0.5$, 点线: $G_2=0$, 虚线: $G_2=-0.5$)

Fig. 2 $\text{Im}(\sigma_1)$ varying with semi-wavelength(The solid curve means the change when $G_2=0.5$, the

dotted curve means that when $G_2=0$ and the dashed curve represents one when $G_2=-0.5$)

4 结 语

本文使用滞弹性近似下的对称流体动力学方程组,分析了其中尺度扰动的动力稳定性。研究表明,相对于使用 Boussinesq 近似而言,滞弹性近似下的对称不稳定条件更为严格一些,亦即深对流发生的频率也应当小一些。在考虑非绝热加热时,扰动增长率随其波长的变化会产生间断现象。中低层加热明显对中- β 尺度扰动具有激发增长的作用,并且在某一个最优波长处,扰动能够最先发展起来,产生合适的中- β 尺度扰动不稳定现象。而中高层加热则对中- β 尺度扰动起到衰减的作用。此外,无论是低层还是高层加热强度达到最大的情况,都会驱使中- β 尺度扰动向暖区传播。当中层加热出现峰值时,它对中- β 尺度扰动的稳定性及传播特征都没有太大的影响。

参考文献:

- [1] Hoskins B J. The role of potential vorticity in symmetric stability and instability[J]. *Quart J Roy Meteor Soc*, 1974, 100 (425): 480-482.
- [2] 许 秦, 周晓平. 非静力平衡大气中的斜压惯性不稳定[J]. *大气科学*, 1982, 6(4): 355-367.
- [3] Xu Q. Conditional symmetric instability and mesoscale rainbands[J]. *Quart J Roy Meteor Soc*, 1986, 112(472): 315-334.
- [4] Reuter G W, Yau M K. Observations of slantwise convective instability in winter cyclones[J]. *Mon Wea Rev*, 1990, 118 (2): 447-458.
- [5] Parsons D B, Hobbs P V. The mesoscale and microscale structure and organization of clouds and precipitation in midlatitude cyclones. Part 1: Comparisons between observational and theoretical aspects of rainbands[J]. *J Atmos Sci*, 1983, 40(10): 2377-2397.
- [6] 朱乾根, 周伟灿, 张海霞. 高低空急流耦合对长江中游强暴雨形成的机理研究[J]. *南京气象学院学报*, 2001, 24(3): 308-314.
- [7] Ogura Y, Juang H M, Zhang K S, et al. Possible triggering mechanisms for severe storms in SESA ME-AVE (9-10 May 1979)[J]. *Bull Amer Meteor Soc*, 1982, 63(5): 503-515.
- [8] Emanuel K A. Inertial instability and mesoscale convective systems. Part 1: Symmetric CISK in a baroclinic flow[J]. *J Atmos Sci*, 1982, 39(5): 1080-1097.
- [9] Thunis P, Bornstein R. Hierarchy of mesoscale flow assumptions and equations[J]. *J Atmos Sci*, 1996, 53(3): 380-397.

The Dynamic Stability of a Two-Dimensional, Non-Adiabatic, Anelastic Fluid

SHEN Xin-yong¹, NI Yun-qi², DING Yi-hui³

(1. Department of Atmospheric Sciences, Nanjing University, Nanjing 210093, China;

2. Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081, China;

3. National Climate Center, Beijing 100081, China)

Abstract: The dynamic stability of meso-scale symmetric perturbation is discussed in terms of two-dimensional fluid-dynamics equations under anelastic approximation, which obtains the criterion of symmetric instability in an adiabatic case. The study indicates that the condition of symmetric perturbation is more rigorous for deep convection than that for shallow one, that the disturbance growth rates experience intermittence in their wavelength-dependent variation in the case of non-adiabatic heating, and that unlike it at mid-upper levels, the heating at mid-lower levels exerts a trigger action to the augment of meso- β perturbation, and causes the perturbation to propagate into a warm sector.

Key words: symmetric instability; non-adiabatic heating; anelastic approximation