第 22 卷第 1 期　　南 京 气 象 学 院 学 报　　Vol. 22 No. 1
1999 年 3 月　　Journal of Nanjing Institute of Meteorology　　Mar. 1999

文章编号: 1000-2022(1999) 01-0055-06

与其导数具有分担值的全纯函数的正规族

张太忠
(南京气象学院数学系, 南京　210044)

摘要: 证明了一个区域上的全纯函数族是正规的, 如果任意的两个相互判别的有限非零值为族中任意函数及其一阶导数在该区域中的 **CM** 分担值。

关　键　词: 全纯函数; 正规族; 分担值
中图分类号: O174.5　　文献标识码: A

本文中, 将采用 Nevanlinna 理论[1,2] 中的标准记号。称两个亚纯函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分担有穷复数 a**CM** 或 **IM**, 若 $f(z)-a$ 和 $g(z)-a$ 具有相同的零点(重数或不记重数)。记号 $O(1)$ 表示正的有限量, 不同的地方允许有不同的值。为方便起见, 我们定义:

$$LD(r,f) := \sum_{i=1}^{l} c_i m(r, L_i),$$

其中 L_i 为由 f 生成的某种对数导数, c_i、l 均为正整数。

Bloch 原理断言: 存在一个 Picard—Liouville 型定理, 则一定存在与此相应的正规定则。为此, 已有许多学者在此方面获得了较丰富的结果[3,4]。另一方面, 人们也可以从所谓分担值定理的条件中推出相应正规定则的存在性, W Schwick 首先开展这方面的研究[5]。Mues 和 Steinmetz[6] 证明了下列结果:

定理 A　设 f 为复平面上的非常数亚纯函数。若 f 和它的导数 f' 分担了三个相互判别的有穷复数 a_1、a_2、a_3**IM**, 则 $f \equiv f'$。

1992 年, W. Schwick 证明了:

定理 B　设 f 为区域 G 上的亚纯函数族, a_1、a_2、a_3 为三个相互判别的有穷复数。若 f 和它的导数 f' 在 G 中分担 a_1、a_2、a_3**IM**, 其中 f 为族 $\boldsymbol{F}$ 中任意一个函数, 则 $\boldsymbol{F}$ 在 G 中正规。

最近, 陈怀惠和华歆厚[1)] 获得:

定理 C　设 $\boldsymbol{F}$ 为区域 G 上的全纯函数族, 若 f, f', f'' 在 G 中分担有穷非零值 a**IM**, 其中 f 为族 $\boldsymbol{F}$ 中的任意函数, 则 $\boldsymbol{F}$ 在 G 中正规。

徐焱和张太忠[2)] 得到:

定理 D　设 $\boldsymbol{F}$ 为区域 G 上的亚纯函数族, 若族 $\boldsymbol{F}$ 中的每个函数 f 和其导数 f' 在 G 中分

收稿日期: 1998-04-01; 改回日期: 1998-10-29
基金项目: 南京气象学院科研基金资助项目
作者简介: 张太忠, 男, 1967 年 6 月生, 硕士, 讲师

1) Chen H H, Hua X H. Normal families concerning shared values, to appear.
2) Xu Y, Zhang T Z. Shared values and a normal family, to appear.

担 0 和有穷非零复数 b**CM**, 则 $\boldsymbol{F}$ 在 G 中正规。

1977 年, L A Rubel 和 C C Yang 证明了:[7]

定理 E　设 f 为复平面上的非常数整函数, a, b 为两个不同的有穷复数。若 f 和其导数 f' 在复平面上分担 a, b**CM**, 则 $f \equiv f'$。

本文将证明下面结果:

定理　设 $\boldsymbol{F}$ 为区域 G 上的全纯函数族, a, b 为两个不同的有穷复数, $ab \neq 0$。若族 $\boldsymbol{F}$ 中的每个函数 f 和其导数 f 在 G 中分担 a, b**CM**, 则 $\boldsymbol{F}$ 在 G 中正规。

1　一个引理

引理　设 $f(z)$ 为单位圆 $D = \{ z < 1\}$ 内的非常数全纯函数, a, b 为两个不同的有穷复数且 $ab \neq 0$。若 f 与其导数 f 在 D 中分担 a, b**CM** 且 $f \quad f'$, $f(0) \neq a, b$, $f(0) \neq f(0)$, $(0) \neq 0$, $(0) \neq 0$, 则对于 $0 < r < 1$, 有

$$T(r,f) < LD(r,f) + \log \frac{(f(0) - a)(f(0) - b)}{(0) \quad (0)(f(0) - f(0))} + O(1)$$

成立, 这里

$$(z) := \frac{f(z)}{f(z) - a} - \frac{f''(z)}{f(z) - a},$$

$$(z) := \frac{f(z)}{f(z) - b} - \frac{f''(z)}{f(z) - b}。$$

证明　因为 f 和 f 在 D 中分担 a, b**CM**, 故存在 D 上的全纯函数 (z), (z) 使

$$\frac{f - a}{f' - a} = \mathrm{e}, \qquad \frac{f - b}{f' - b} = \mathrm{e} \tag{1}$$

成立。由(1) 式, 得到

$$(Z) = \frac{f'}{f - a} - \frac{f''}{f' - a}$$

从而有

$$\frac{'}{f - b} = \frac{f'}{(f - a)(f - b)} - \frac{f''}{(f' - a)(f - b)} =$$

$$\frac{1}{b - a}\left(\frac{f'}{f - b} - \frac{f'}{f - a}\right) - \frac{f'}{f - b}\frac{1}{a}\left(\frac{f''}{f' - a} - \frac{f'}{f}\right)$$

这样,

$$m(r, \quad) = LD(r,f) + O(1),$$

$$m\left(r, \frac{'}{f - b}\right) = LD(r,f) + O(1)$$

由 Jensen 公式[1,2], 得到:

$$m\left(r, \frac{1}{f - b}\right) \leq m\left(r, \frac{'}{f - b}\right) + m\left(r, \frac{1}{}\right) \leq$$

$$LD(r,f) + T\left(r, \frac{1}{}\right) + O(1) =$$

$$LD(r,f) + T(r, \quad) + \log \frac{1}{(0)} + O(1) =$$

$$LD(r,f) + \log \frac{1}{(0)} + O(1) \tag{2}$$

类似地,

$$m(r,\frac{1}{f-a})\leq LD(r,f)+\log\frac{1}{|(0)}+O(1) \tag{3}$$

另一方面,

$$N(r,\frac{1}{f-a})+N(r,\frac{1}{f-b})\leq N(r,\frac{1}{f-f})\leq$$

$$T(r,f-f)+\log\frac{1}{f(0)-f|(0)}=$$

$$m(r,f-f)+\log\frac{1}{f(0)-f|(0)}=$$

$$m(r,f(1-\frac{f'}{f}))+\log\frac{1}{f(0)-f|(0)}\leq$$

$$m(r,f)+m(r,\frac{f'}{f})+\log\frac{1}{f(0)-f|(0)}+O(1)=$$

$$T(r,f)+LD(r,f)+\log\frac{1}{f(0)-f|(0)}+O(1) \tag{4}$$

结合(2),(3),(4)并利用 Jensen 公式,得到:

$$2T(r,f)+\log\frac{1}{f(0)-a}+\log\frac{1}{f(0)-b}\leq$$

$$T(r,\frac{1}{f-a})+T(r,\frac{1}{f-b})+O(1)\leq$$

$$T(r,f)+LD(r,f)+m(r,\frac{1}{f-a})+m(r,\frac{1}{f-b})+\log\frac{1}{f(0)-f|(0)}+O(1)\leq$$

$$T(r,f)+LD(r,f)+\log\frac{1}{|(0)}+\log\frac{1}{|(0)}+\log\frac{1}{f(0)-f|(0)}+O(1)$$

引理证毕。

2 定理的证明

不妨设 $G=D=\{\ \ z<1\}$,只要证明在原点 $z=0$ 处的正规性。反设族 $\boldsymbol{F}$ 中的序列 $\{f_n\}$ 在原点 $z=0$ 处不正规,区分两种情况:

(1)若对于每个自然数 n,有 $f_n\equiv f'_n$,则 $f_n(z)=C_n e^z$,显然 $\{f_n(z)\}$ 在原点正规。

(2)不妨仅考虑对于每个自然数 n,都有 $f_n\ \ f_n$ 的情况。因 $\{f_n\}$ 在 $z=0$ 处不正规,故通过 Zalcman[8] 的一个引理知:存在序列 $z_n\to 0$,正数序列 $\ _n\to 0$ 和复平面 C 上的非常数整函数 f 使 $f_n(z_n+\ \ _n z)$ 在 C 内按球面距离内闭一致收敛于 f。

若 $f_n\neq a,b$,则由 Marty 定则[1~3]知 $\{f_n\}$ 正规,故 a,b 中至少有一个(不妨取 a)不会为 f_n 的 Picard 例外值,Hurwitz 定理表明存在 $z_0\in C$ 使 $f(z_0)=a$ 同样由 Hurwitz 定理,存在一个序列 $\ \to z_0$ 使得

$$a=f_n(z_n+\ \ _n\ _n)=f'_n(z_n+\ \ _n\ _n),$$

这意味着

$$f|(z_0)=\lim_{n\to\infty}\ _n f'_n(z_n+\ \ _n\ _n)=0$$

由此立刻推出 f 不为一次多项式。

同时,也能导出:

$$_1(Z) := \frac{f'(z)}{f(z)-a} - \frac{f''(z)}{f'(z)} \quad 0,$$

$$_1(z) := \frac{f'(z)}{f(z)-b} - \frac{f''(z)}{f'(z)} \quad 0。$$

否则, $_1(Z) \equiv 0$, 由此导出

$$f(z) = a + e^{c_1 z + c_2}$$

其中 c_1、c_2 为常数。这样有 $f \neq a$, 这与 $f(z_0) = a$ 矛盾。所以 $_1(z) \quad 0$。同样 $_1(z) \equiv 0$ 意味着

$$f(z) = b + e^{c_3 z + c_4}$$

其中 c_3、c_4 为常数。这样有 $f \neq b$。由 Hurwitz 定理知 $f_n \neq b$, 注意到 f_n 和 f_n' 在 G 中分担 b**CM**, 容易知道:

$$f_n' \neq b \quad 从而 (f_n - b)' \neq b, f_n - b \neq 0,$$

其中 $b \neq 0$。由顾永兴定则[9], $\{f_n - b\}$ 在原点正规从而 $\{f_n\}$ 也正规。这是一个矛盾。

取 z_1 使得 $f(z_1) \neq a, b, f'(z_1) \neq 0, f''(z_1) \neq 0, \ _1(z_1) \neq 0, \ _1(z_1) \neq 0$。

则 $f_n(z_n + \ _n z_1) \to f(z_1), f_n'(z_n + \ _n z_1) \to \infty, f_n''(z_n + \ _n z_1) \to \infty$, 且

$$\log \left| \frac{(f_n(\ _n) - a)(f_n(\ _n) - b)}{\left\{\frac{f_n'(\ _n)}{f_n(\ _n) - a} - \frac{f_n''(\ _n)}{f_n'(\ _n) - a}\right\}\left\{\frac{f_n'(\ _n)}{f_n(\ _n) - b} - \frac{f_n''()}{f_n''(\ _n) - b}\right\}\left(f_n(\ _n) - f_n'(\ _n)\right)} \right| \to \infty,$$

其中 $_n = z_n + \ _n z_1$

对 f_n 应用本文引理且假定 $z_n + \ _n z_1 = 0$(否则可以考虑 $g_n(z) = f_n(z_n + \ _n z_1 + z)$, 序列 $\{g_n\}$ 在原点正规当且仅当 f_n 在原点正规。) 则

$$T(r, f_n) \leq O(1)\left\{LD(r, f_n) + 1\right\}$$

使用熊庆来的一个估计[10], 得到: 对于 $\frac{1}{2} < r < 1$, 有

$$T(r, f_n) \leq O(1)\left\{\log^+ \frac{1}{1-r} + 1\right\}$$

由 Montel 定理(参见文献[2, 3]) 不难导出矛盾。

定理证毕。

参考文献

[1] HAYMAN W K. Meromorphic functions[M]. London: Oxford Press, 1975
[2] 杨 乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982
[3] SCHIFF J L. Normal families[M]. Berlin: Spring-Verlag, 1995
[4] 顾永兴. 亚纯函数正规族[M]. 成都: 四川教育出版社, 1991
[5] SCHWICK W. Sharing values and normality[J]. Arch Math, 1992, 59(1): 50- 54
[6] MUSE E, STEINMETZ Z. Meromorphe funktionen die mit ihrer ableitung werte teilen[J]. Manusripta Math, 1979, 29(1): 195- 206
[7] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数的唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社. 1992
[8] ZALCMAN L. A heuristic principle in complex function theory[J]. Amer Math Monthly, 1975, 82(3): 813- 817
[9] 顾永兴. 亚纯函数族的一个正规定则[J]. 中国科学, 数学专辑(I), 1979: 276～274
[10] HONG K L. Sur les fonctions holomorphes dont les derivees admettant une valeur exceptionelle[J]. Ann Ec Norm Sup, 1955, 72(1): 165- 197

A NORMAL FAMILY FOR HOLOMORPHIC FUNCTIONS SHARING VALUES WITH THEIR DERIVATIVES

ZHANG Tai-zhong
(Department of Mathematics, NIM, Nanjing 210044)

Abstract: It is shown that a family $\boldsymbol{F}$ for holomorphic functions in a domain G is normal, if f and its derivative f' share two distinct finite nonzero values **CM** in G for every function $f \in \boldsymbol{F}$.

Keywords: holomorphic functions; normal families; shared values