第 20 卷第 4 期　　南京气象学院学报　　Vol. 20 No. 4
1997 年 12 月　　Journal of Nanjing Institute of Meteorology　　Dec. 1997

$H_{\mathrm{III}}(2n)$ 中元素的一种标准化表示

沈　雁

(南京气象学院基础科学系, 南京　210044)

摘　要　给出 $H_{\mathrm{III}}(2n)$ 中元素的一种标准化表示, $H_{\mathrm{III}}(2n) = \{Z \in C^{2n\times 2n} \mid \frac{1}{2}(Z+\bar{Z}') > 0, ZJ = JZ'\}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}(Z+\bar{Z}) > 0$ 表示矩阵 $\frac{1}{2}(Z+\bar{Z}')$ 是正定的。

关键词　酉矩阵, 上三角矩阵, Hermite 矩阵

分类号　O151.21

寻求矩阵在各种意义下的标准化表示对与矩阵有关的数值计算与理论分析有着重要的意义[1]。本文给出 $H_{\mathrm{III}}(2n)$ 中元素的一种标准化表示, 这里, $H_{\mathrm{III}}(2n) = \{Z \in C^{2n\times 2n} \mid \frac{1}{2}(Z+\bar{Z}') > 0, ZJ = JZ'\}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$。这一工作对第三类典型域 $R_{\mathrm{III}}(2n)$ 的几何和分析性质的研究有一定的应用。

1　几个定理

设 $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, 则 J 为酉矩阵, $J' = J^{-1} = -J$, 且 $2n$ 阶矩阵 B 满足 $BJ = J\bar{B}$ 的充要条件是 $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ -\bar{B}_2 & \bar{B}_1 \end{pmatrix}$, 其中 B_1、B_2 均为 n 阶矩阵。

定理 1　设 B 为 $2n$ 阶非奇异矩阵, 满足 $BJ = J\bar{B}$, 则存在 $2n$ 阶酉矩阵 U, 满足 $UJ = J\bar{U}$, 使得 $UB = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix}$, 其中 A_1、A_2 均为上三角矩阵, A_1 的对角元为正, A_2 的对角元为 0。

证　用归纳法。

当 $n = 1$ 时, 设 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, 因 B 非奇异, a、b 不全为 0。取 $U = \frac{1}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}}\begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix}$, U 为酉矩阵, 且 $UJ = J\bar{U}$

$$UB = \frac{1}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}}\begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}}\begin{pmatrix} |a|^2+|b|^2 & 0 \\ 0 & |a|^2+|b|^2 \end{pmatrix}$$

收稿日期: 1996-11-18; 改回日期: 1997-02-23

作者简介: 沈雁, 女, 1958 年 9 月生, 学士, 讲师, 现在南京审计学院工作

故当 $n=1$ 时结论成立。

设当 $\boldsymbol{B}$ 为 $2(n-1)$ 阶非奇异矩阵时结论成立。

当 $\boldsymbol{B}$ 为 $2n$ 阶矩阵时, 设

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n & \bar\beta_1,\bar\beta_2,\cdots,\bar\beta_n\\ -\bar\beta_1,-\bar\beta_2,\cdots,-\bar\beta_n & \bar\alpha_1,\bar\alpha_2,\cdots,\bar\alpha_n\end{pmatrix}=(\gamma_1,\cdots\gamma_n,-\boldsymbol{J}\bar\gamma_1,\cdots-\boldsymbol{J}\bar\gamma_n)$$

其中 α_j、β_j 为 n 维列向量; γ_j 为 $2n$ 维列向量, $j=1,2,\cdots,n$。

因 $\boldsymbol{B}$ 非奇异, 故 $\gamma_1\neq0$, 令 $\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{\|\gamma_1\|}\gamma_1$, $\boldsymbol{u}_1$ 为单位向量, $\gamma_1=\|\gamma_1\|\bar{\boldsymbol{u}}_1$。$\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_1$ 也是单位向量, 且 $\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_1\perp\boldsymbol{u}_1$, 事实上, $\bar{\boldsymbol{u}}_1'(\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_1)=(\bar{\boldsymbol{u}}_1'\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_1)'=\bar{\boldsymbol{u}}_1'\boldsymbol{J}'\bar{\boldsymbol{u}}_1=-\bar{\boldsymbol{u}}_1'\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_1$, 故 $\bar{\boldsymbol{u}}_1'(\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_1)=0$。

取 $\boldsymbol{u}_2$ 为垂直于 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_1$ 的单位向量, 则 $\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_2$ 为垂直于 $\boldsymbol{u}_2$ 的单位向量, $\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_2$ 也垂直于 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_1$。事实上, $\overline{\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_2}'\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_2'\boldsymbol{J}'\boldsymbol{u}_1=-\overline{\bar{\boldsymbol{u}}_2'\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_1}=0$, $\overline{\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_2}'\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_1=\boldsymbol{u}_2'\boldsymbol{J}'\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_1=\boldsymbol{u}_2'\bar{\boldsymbol{u}}_1=0$, 从而 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_1$、$\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_2$ 为标准正交组。再取 $\boldsymbol{u}_3$ 为垂直于 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_1$、$\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_2$ 的单位向量, 如此下去, 可取到标准正交向量组 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n,\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_1,\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_2,\cdots,\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_n$。

令
$$\boldsymbol{U}_1=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n,-\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_1,-\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_2,\cdots,-\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_n)'$$

$\boldsymbol{U}_1$ 为酉矩阵, $\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{U}}_1$, 且

$$\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1'\\ \boldsymbol{u}_2'\\ \vdots\\ \boldsymbol{u}_n'\\ -(\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_1)'\\ -(\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_2)'\\ \vdots\\ -(\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{u}}_n)'\end{pmatrix}(\|\gamma_1\|\bar{\boldsymbol{u}}_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n,-\|\gamma_1\|\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_1,-\boldsymbol{J}\bar\gamma_2,\cdots,-\boldsymbol{J}\bar\gamma_n)$$

$$=\begin{pmatrix}\|\gamma_1\| & c_{12} & \cdots & c_{1n} & 0 & d_{12} & \cdots & d_{1n}\\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} & 0 & d_{22} & \cdots & d_{2n}\\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & c_{n2} & \cdots & c_{nn} & 0 & d_{n2} & \cdots & d_{nn}\\ 0 & -\bar d_{12} & \cdots & -\bar d_{1n} & \|\gamma_1\| & \bar c_{12} & \cdots & \bar c_{1n}\\ 0 & -\bar d_{22} & \cdots & -\bar d_{2n} & 0 & \bar c_{22} & \cdots & \bar c_{2n}\\ & \cdots & & & & & & \\ 0 & -\bar d_{n2} & \cdots & -\bar d_{nn} & 0 & \bar c_{n2} & \cdots & \bar c_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\|\gamma_1\| & \boldsymbol{C}_1 & 0 & \boldsymbol{D}_1\\ 0 & \boldsymbol{C}_2 & 0 & \boldsymbol{D}_2\\ 0 & -\bar{\boldsymbol{D}}_1 & \|\gamma_1\| & \bar{\boldsymbol{C}}_1\\ 0 & -\bar{\boldsymbol{D}}_2 & 0 & \bar{\boldsymbol{C}}_2\end{pmatrix}$$

其中
$$\boldsymbol{C}_1=(c_{12},\cdots,c_{1n}),\ \boldsymbol{D}_1=(d_{12},\cdots,d_{1n})$$
$$\boldsymbol{C}_2=\begin{pmatrix}c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ & \cdots & \\ c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{D}_2=\begin{pmatrix}d_{22} & \cdots & d_{2n}\\ & \cdots & \\ d_{n2} & \cdots & d_{nn}\end{pmatrix}$$

令
$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}_2\\ -\bar{\boldsymbol{D}}_2 & \bar{\boldsymbol{C}}_2\end{pmatrix}$$

因 $|\boldsymbol{B}|\neq0$, 故 $|\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{B}|\neq0$, 从而 $|\boldsymbol{B}_1|\neq0$, 即 $\boldsymbol{B}_1$ 为 $2(n-1)$ 阶非奇异矩阵, 满足 $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{J}_{2(n-1)}=\boldsymbol{J}_{2(n-1)}\bar{\boldsymbol{B}}_1$。由归纳假设, 存在 $2(n-1)$ 阶酉矩阵 $\boldsymbol{V}_1$, 满足 $\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{J}_{2(n-1)}=\boldsymbol{J}_{2(n-1)}\bar{\boldsymbol{V}}_1$, 使得

$$\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\\ -\overline{\boldsymbol{B}}_{12} & \overline{\boldsymbol{B}}_{11}\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{B}_{11}$、$\boldsymbol{B}_{12}$ 为 $n-1$ 阶上三角矩阵, $\boldsymbol{B}_{11}$ 的对角元为正, $\boldsymbol{B}_{12}$ 的对角元为 0。

设

$$\boldsymbol{V}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_{11} & \boldsymbol{V}_{12}\\ -\overline{\boldsymbol{V}}_{12} & \overline{\boldsymbol{V}}_{11}\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_{11} & \boldsymbol{V}_{12}\\ -\overline{\boldsymbol{V}}_{12} & \overline{\boldsymbol{V}}_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}_2\\ -\overline{\boldsymbol{D}}_2 & \overline{\boldsymbol{C}}_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_{11}\boldsymbol{C}_2-\boldsymbol{V}_{12}\overline{\boldsymbol{D}}_2 & \boldsymbol{V}_{11}\boldsymbol{D}_2+\boldsymbol{V}_{12}\overline{\boldsymbol{C}}_2\\ -\overline{\boldsymbol{V}}_{12}\boldsymbol{C}_2-\overline{\boldsymbol{V}}_{11}\boldsymbol{D}_2 & -\overline{\boldsymbol{V}}_{12}\boldsymbol{D}_2+\overline{\boldsymbol{V}}_{11}\overline{\boldsymbol{C}}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\\ -\boldsymbol{B}_{12} & \boldsymbol{B}_{11}\end{pmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{V}_{11} & 0 & \boldsymbol{V}_{12}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -\overline{\boldsymbol{V}}_{12} & 0 & \overline{\boldsymbol{V}}_{11}\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{V}$ 为 $2n$ 阶酉矩阵, 且 $\boldsymbol{VJ}=\boldsymbol{J}\overline{\boldsymbol{V}}$。

$$\boldsymbol{VU}_1\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{V}_{11} & 0 & \boldsymbol{V}_{12}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -\overline{\boldsymbol{V}}_{12} & 0 & \overline{\boldsymbol{V}}_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1 & \boldsymbol{C}_1 & 0 & \boldsymbol{D}_1\\ 0 & \boldsymbol{C}_2 & 0 & \boldsymbol{D}_2\\ 0 & -\overline{\boldsymbol{D}}_1 & \gamma_1 & \overline{\boldsymbol{C}}_1\\ 0 & -\overline{\boldsymbol{D}}_2 & 0 & \overline{\boldsymbol{C}}_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\gamma_1 & \boldsymbol{C}_1 & 0 & \boldsymbol{D}_1\\ 0 & \boldsymbol{B}_{11} & 0 & \boldsymbol{B}_{12}\\ 0 & -\overline{\boldsymbol{D}}_1 & \gamma_1 & \overline{\boldsymbol{C}}_1\\ 0 & -\overline{\boldsymbol{B}}_{12} & 0 & \overline{\boldsymbol{B}}_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ -\overline{\boldsymbol{A}}_2 & \overline{\boldsymbol{A}}_1\end{pmatrix}$$

其中, $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}\gamma_1 & \boldsymbol{C}_1\\ 0 & \boldsymbol{B}_{11}\end{pmatrix}$ 为 n 阶正线上三角矩阵; $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{D}_1\\ 0 & \boldsymbol{B}_{12}\end{pmatrix}$ 为上三角矩阵, 其对角线元素为 0。

令 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{VU}_1$ 即可。

定理 2　设 Z 是正定的 $2n$ 阶 Hermite 矩阵, 满足 $\boldsymbol{ZJ}=\boldsymbol{J}\overline{\boldsymbol{Z}}$, 则存在 $2n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ -\overline{\boldsymbol{A}}_2 & \overline{\boldsymbol{A}}_1\end{pmatrix}$, 其中, $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$ 为上三角矩阵, $\boldsymbol{A}_1$ 的对角元为正, $\boldsymbol{A}_2$ 的对角元为 0, 便得 $\boldsymbol{Z}=\overline{\boldsymbol{A}}\,'\boldsymbol{A}$。

证　由文献 [2] 定理 1, 存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$, 满足 $\boldsymbol{UJ}=\boldsymbol{J}\overline{\boldsymbol{U}}$, 使得

$$\boldsymbol{UZ}\overline{\boldsymbol{U}}\,'=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_n & & & \\ & & & \lambda_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

由 $\boldsymbol{Z}$ 正定, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 均为正数, 令

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \sqrt{\lambda_n} & & & \\ & & & \sqrt{\lambda_1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{Z}\bar{\boldsymbol{U}}' = \Lambda\Lambda$, 即 $\boldsymbol{Z} = \bar{\boldsymbol{U}}'\Lambda\Lambda\boldsymbol{U} = (\overline{\Lambda\boldsymbol{U}})'(\Lambda\boldsymbol{U})$。令 $\boldsymbol{B} = \Lambda\boldsymbol{U}$, 则 $\boldsymbol{Z} = \bar{\boldsymbol{B}}'\boldsymbol{B}$, 且 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{J} = \Lambda\boldsymbol{U}\boldsymbol{J} = \Lambda\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{J}\Lambda\bar{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{B}}$。由定理 1, 存在 $2n$ 阶酉矩阵 $\boldsymbol{V}$, 满足 $\boldsymbol{V}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{V}}$, 使得

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ -\bar{\boldsymbol{A}}_2 & \bar{\boldsymbol{A}}_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$ 均为上三角矩阵, $\boldsymbol{A}_1$ 的对角元为正, $\boldsymbol{A}_2$ 的对角元为 0。

$$\boldsymbol{Z} = \bar{\boldsymbol{B}}'\boldsymbol{B} = \bar{\boldsymbol{B}}'\bar{\boldsymbol{V}}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{B} = (\overline{\boldsymbol{V}\boldsymbol{B}})'(\boldsymbol{V}\boldsymbol{B}) = \bar{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{A}$$

定理得证。

2 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{III}}(2n)$ 中元素的标准化表示

令 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{III}}(2n) = \{\boldsymbol{Z} \in C^{2n\times 2n} \mid \frac{1}{2}(\boldsymbol{Z} + \bar{\boldsymbol{Z}}') > 0, \boldsymbol{Z}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{Z}\}$ 其中 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{Z} + \bar{\boldsymbol{Z}}') > 0$ 表示 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{Z} + \bar{\boldsymbol{Z}}')$ 为正定矩阵。

定理　对任意 $\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{H}_{\mathrm{III}}(2n)$, 存在唯一的 $\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{A}$, 使得 $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}(\mathrm{i}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{S})\bar{\boldsymbol{A}}'$, 其中 $\boldsymbol{H}$ 为满足 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{H}}$ 的 Hermite 矩阵, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ -\bar{\boldsymbol{A}}_2 & \bar{\boldsymbol{A}}_1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$ 为 n 阶上三角矩阵, $\boldsymbol{A}_1$ 的对角元为正, $\boldsymbol{A}_2$ 的对角元为 0。

证　令 $\boldsymbol{H} = \frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{S} - \bar{\boldsymbol{S}}')$, $\boldsymbol{H}$ 为满足 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{H}}$ 的 Hermite 矩阵, 事实上

$$\bar{\boldsymbol{H}}' = -\frac{\mathrm{i}}{2}\overline{(\boldsymbol{S} - \bar{\boldsymbol{S}}')}' = -\frac{\mathrm{i}}{2}(\bar{\boldsymbol{S}}' - \boldsymbol{S})$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{S} - \bar{\boldsymbol{S}}') = \boldsymbol{H}$$

即 $\boldsymbol{H}$ 为 Hermite 矩阵。

由 $\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{H}_{\mathrm{III}}(2n)$, $\boldsymbol{S}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{S}'$, 从而 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}\boldsymbol{J} = -\boldsymbol{S}'$, 故 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}'\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{S}} = \bar{\boldsymbol{S}}'\boldsymbol{J}$。

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{J} = \frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{S} - \bar{\boldsymbol{S}}')\boldsymbol{J} = \frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{J} - \bar{\boldsymbol{S}}'\boldsymbol{J})$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}' - \boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{S}}) = \boldsymbol{J}\,\frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{S}' - \bar{\boldsymbol{S}}) = \boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{H}}$$

其次, 由 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{S} + \bar{\boldsymbol{S}}')$ 是正定的 Hermite 矩阵知 $[\frac{1}{2}(\boldsymbol{S} + \bar{\boldsymbol{S}}')]^{-1}$ 也是正定的 Hermite 矩阵。

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{S} + \bar{\boldsymbol{S}}')\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{J} + \bar{\boldsymbol{S}}'\boldsymbol{J}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}' + \boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{S}})$$

$$= \boldsymbol{J}\,\frac{1}{2}(\boldsymbol{S}' + \bar{\boldsymbol{S}}) = \boldsymbol{J}\,\overline{\frac{1}{2}(\boldsymbol{S} + \bar{\boldsymbol{S}}')}$$

从而有

$$\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{S}+\bar{\boldsymbol{S}}')\right]^{-1}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}\,\overline{\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{S}+\bar{\boldsymbol{S}}')\right]^{-1}}$$

由定理 2, 存在 $2n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ -\bar{\boldsymbol{A}}_2 & \bar{\boldsymbol{A}}_1\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$ 为上三角矩阵, $\boldsymbol{A}_1$ 的对角元为正, $\boldsymbol{A}_2$ 的对角元为 0, 使得 $\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{S}+\bar{\boldsymbol{S}}')\right]^{-1}=\bar{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{A}$, 即 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{S}+\bar{\boldsymbol{S}}')=\boldsymbol{A}^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}'^{-1}$, 又 $\boldsymbol{S}+i\boldsymbol{H}=\boldsymbol{S}+i\,\frac{i}{2}(\boldsymbol{S}-\bar{\boldsymbol{S}}')=\boldsymbol{S}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{S}-\bar{\boldsymbol{S}}')=\frac{1}{2}(\boldsymbol{S}+\bar{\boldsymbol{S}}')$, 从而 $\boldsymbol{S}+\mathrm{i}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{A}^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}'^{-1}$ 即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}+\mathrm{i}\boldsymbol{H})\bar{\boldsymbol{A}}'=\boldsymbol{I}$。$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{H}$ 的存在性得证。

以下证唯一性。

首先, 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有形式 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ -\bar{\boldsymbol{A}}_2 & \bar{\boldsymbol{A}}_1\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$ 均为上三角矩阵, $\boldsymbol{A}_1$ 的对角元为正, $\boldsymbol{A}_2$ 的对角元为 0, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也具有同样形式。事实上, 因 $\boldsymbol{AJ}=\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{A}}$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{A}}^{-1}$, 从而可设

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ -\bar{C}_2 & \bar{C}_1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{AA}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ -\bar{\boldsymbol{A}}_2 & \bar{\boldsymbol{A}}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2\\ -\bar{\boldsymbol{C}}_2 & \bar{\boldsymbol{C}}_1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C}_1-\boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{C}}_2 & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C}_2+\boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{C}}_1\\ -\bar{\boldsymbol{A}}_2\boldsymbol{C}_1-\bar{\boldsymbol{A}}_1\bar{\boldsymbol{C}}_2 & -\bar{\boldsymbol{A}}_2\boldsymbol{C}_2+\bar{\boldsymbol{A}}_1\bar{\boldsymbol{C}}_1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C}_1-\boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{C}}_2=\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C}_2+\boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{C}}_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{A}_2\overline{\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{C}_1}=\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{C}_2=-\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{C}}_1\end{cases}$$

从而 $(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{A}}_1^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}_2)\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{C}_1=(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{A}}_1^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}_2)^{-1}$, $\boldsymbol{C}_2=-\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2(\bar{\boldsymbol{A}}_1+\bar{\boldsymbol{A}}_2\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2)^{-1}$

由于正线上三角矩阵的逆仍为正线上三角矩阵, 两个上三角矩阵的乘积仍是上三角矩阵, 故 $\boldsymbol{C}_1$ 为正线上三角矩阵, $\boldsymbol{C}_2$ 为对角线为 0 的上三角矩阵。故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 具有同样的形式。

其次, 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均具上述形式, 则乘积 $\boldsymbol{AB}$ 也具有上述形式。

对 $\boldsymbol{S}\in\boldsymbol{H}_{\mathrm{III}}(2n)$, 设存在 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H}_1$ 分别满足 $\boldsymbol{HJ}=\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{H}}$, $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}\bar{\boldsymbol{H}}_1$, 以及具有上述形式的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ -\bar{\boldsymbol{A}}_2 & \bar{\boldsymbol{A}}_1\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\ -\bar{\boldsymbol{B}}_2 & \bar{\boldsymbol{B}}_1\end{pmatrix}$, 使得

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}(\mathrm{i}\boldsymbol{H}+\boldsymbol{S})\bar{\boldsymbol{A}}',\quad \boldsymbol{I}=\boldsymbol{B}(\mathrm{i}\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{S})\bar{\boldsymbol{B}}'$$

由 $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}(\mathrm{i}\boldsymbol{H}+\boldsymbol{S})\bar{\boldsymbol{A}}'=\mathrm{i}\boldsymbol{AH}\bar{\boldsymbol{A}}'+\boldsymbol{AS}\bar{\boldsymbol{A}}'$, 得 $\boldsymbol{I}=\bar{\boldsymbol{I}}'=\overline{\mathrm{i}\boldsymbol{AH}\bar{\boldsymbol{A}}'+\boldsymbol{AS}\bar{\boldsymbol{A}}'}'=-\mathrm{i}\boldsymbol{AH}\bar{\boldsymbol{A}}'+\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{S}}'\bar{\boldsymbol{A}}'$, 从而 $2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{AS}\bar{\boldsymbol{A}}'+\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{S}}'\bar{\boldsymbol{A}}'=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}+\bar{\boldsymbol{S}}')\bar{\boldsymbol{A}}'$, 即 $\boldsymbol{A}\frac{\boldsymbol{S}+\bar{\boldsymbol{S}}'}{2}\bar{\boldsymbol{A}}'=\boldsymbol{I}$, $\frac{\boldsymbol{S}+\bar{\boldsymbol{S}}'}{2}=\boldsymbol{A}^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}'^{-1}=(\bar{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{A})^{-1}$。同理, $\frac{\boldsymbol{S}+\bar{\boldsymbol{S}}'}{2}=(\bar{\boldsymbol{B}}'\boldsymbol{B})^{-1}$。从而有 $(\bar{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{A})^{-1}=(\bar{\boldsymbol{B}}'\boldsymbol{B})^{-1}$ 即 $\bar{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{A}=\bar{\boldsymbol{B}}'\boldsymbol{B}$。由此 $\boldsymbol{BA}^{-1}=\bar{\boldsymbol{B}}'^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}'=\overline{\boldsymbol{AB}^{-1}}'$

设

$$\boldsymbol{BA}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2\\ -\boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{C}_1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{AB}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{D}_2\\ -\boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{D}_1\end{pmatrix}$$

其中, $\boldsymbol{C}_1$、$\boldsymbol{D}_1$ 为正线上三角矩阵, $\boldsymbol{C}_2$、$\boldsymbol{D}_2$ 为对角线元素为 0 的上三角矩阵。由 $\boldsymbol{BA}^{-1}=\overline{\boldsymbol{AB}^{-1}}'$, 得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2\\ -\bar{\boldsymbol{C}}_2 & \bar{\boldsymbol{C}}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{D}}_1' & -\boldsymbol{D}_2'\\ \bar{\boldsymbol{D}}_2' & \boldsymbol{D}_1'\end{pmatrix}$$

从而

$$C_1 = \bar{D}_1', C_2 = -D_2'$$

即得

$$C_2 = 0, C_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

故

$$BA^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_n & & & \\ & & & \lambda_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda_1$$

即 $B=\Lambda_1 A$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为正数。

又由 $\bar{A}'A=\bar{B}'B=\overline{\Lambda_1 A}'\Lambda_1 A=\bar{A}'\Lambda_1\Lambda_1 A$, 得 $\Lambda_1^2=I$, 即 $\lambda_j^2=1$, $j=1,2,\cdots,n$, 再由 $\lambda_j>0$, 得 $\lambda_j=1$, $j=1,2,\cdots,n$。从而 $\Lambda_1=I, B=A$。

将 $B=A$ 代入 $I=A(iH+S)\bar{A}'=B(iH_1+S)\bar{B}'$, 得 $iH+S=iH_1+S$, 所以 $H=H_1$。

唯一性得证。

参 考 文 献

1 陆启铿. 典型流形与典型域. 上海: 上海科学技术出版社, 1963. 348～362

2 沈 雁. 两类复矩阵的标准形. 徐州师范学院学报, 1996, 14(2): 18

A STANDARDIZED REPRESENTATION OF ELEMENTS OF $H_{\mathrm{III}}(2n)$

Shen Yan

(Department of Basic Courses, NIM, Nanjing 210044)

Abstract Presented in this paper is a standardized representation of the elements in $H_{\mathrm{III}}(2n)=\{Z\in C^{2n\times 2n} \mid \frac{1}{2}(Z+\bar{Z}')>0, ZJ=JZ\}$, where $J=\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, $A>0$ for a Hermitian matrix A means that A is positive definite.

Keywords unitary matrix, upper triangular matrix, Hermitian matrix