第 19 卷第 4 期　　南 京 气 象 学 院 学 报　　Vol. 19 No. 4
1996 年 12 月　　Journal of Nanjing Institute of Meteorology　　Dec. 1996

锥球状粒子对偏振雷达电磁波的散射和衰减特性‡

王宝瑞[1)]　忻翎艳[2)]　张培昌[3)]　蒋修武[1)]

(1) 南京气象学院基础科学系, 南京　210044, 2) 加拿大阿尔贝他大学, 3) 南京气象学院大气物理学系, 南京　210044)

摘　要　采用积分方程法得到均匀及非均匀锥球状冰雹对偏振雷达电磁波散射、衰减的数值结果, 着重分析了粒子的尺度与形状因子对锥球状粒子的散射和衰减特性的影响。

关键词　积分方程法, 锥球状冰雹, 非均匀介电体, 散射, 衰减

分类号　P406

多年来, 人们一般都依据雷利散射和米散射理论来解释雷达探测云、雨时的诸多现象, 并已在理论上就观测到的回波图象所反映的有关粒子的物理和几何特性有了较深的了解。但无论是雷利散射还是米散射理论都有其局限性, 它们只能对球形粒子的散射作出较完善的解释, 而真实大气中并非都是球形粒子。云雨中的粒子在运动过程中由于受到上升或下沉气流等因素的影响, 其形状已不再是球形而呈现出椭球、柱形和锥球等形状。对于椭球形粒子的散射和衰减, 文献[2～4]已作了详尽的讨论, 本文仅就锥球形气象粒子的数值结果进行分析。

1　理论公式

设在无限大媒质中有一个电磁特性与周围媒质不同的物体, 此物体占据闭合面所包围的内部区域 V_1, 周围环境为 V_0, 电磁场矢量满足麦克斯韦方程

$$\nabla \wedge \boldsymbol{E} - \mathrm{i}\omega\mu_0 \boldsymbol{H} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \wedge \boldsymbol{H} + \mathrm{i}\omega\mu_0 \boldsymbol{E} = 0 \tag{2}$$

在 V_0 区域内对(1)和(2)式作空间傅里叶变换及傅里叶逆变换, 并应用界面 S 处的边值关系, 可得散射场 $\boldsymbol{E}^s$ 满足的积分方程[5]

$$-\iint_S [\Gamma_0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]\cdot[\boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{r}')]\,\mathrm{d}S = \boldsymbol{E}^s \qquad \boldsymbol{r} \in V_0 \tag{3}$$

式中行矩阵 $[\Gamma_0] = [\Gamma_0^{ee}\Gamma_0^{em}]$ 的并矢元素由下式决定

$$\Gamma_0^{ee}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}_1^e(\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}\nabla \wedge \nabla \wedge [\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}_1^e(\boldsymbol{r}')]$$

$$\Gamma_0^{em}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}_1^m(\boldsymbol{r}') = -\nabla \wedge [\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}_1^m(\boldsymbol{r}')]$$

其中 $\boldsymbol{J}_1^e(\boldsymbol{r}')$ 和 $\boldsymbol{J}_1^m(\boldsymbol{r}')$ 是列矩阵 $[\boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{r}')]$ 的两个元素, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 为格林并矢, 即

$$[\boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{r}')] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1^e(\boldsymbol{r}') \\ \boldsymbol{J}_1^m(\boldsymbol{r}') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{H}_1 \\ \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{E}_1 \end{bmatrix}$$

---

‡　国家自然科学基金资助项目

收稿日期: 1996-01-29; 改回日期: 1996-06-04

$\boldsymbol{n}$ 为 S 面指向 V_0 区的外法线单位矢, $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{H}_1$ 为区域 V_1 内的总场量。

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{i}k_0}{\pi}\sum_v D_v[\boldsymbol{M}_v^{(1)}(k_0\boldsymbol{r}_<)\boldsymbol{M}_v^{(3)}(k_0\boldsymbol{r}_>) + \boldsymbol{N}_v^{(1)}(k_0\boldsymbol{r}_<)\boldsymbol{N}_v^{(3)}(k_0\boldsymbol{r}_>)]$$

式中矢量球谐函数 $\boldsymbol{M}_v^{(j)}, \boldsymbol{N}_v^{(j)}$ 为矢量波动方程的解, 即

$$\boldsymbol{M}_v^{(j)}(k_0\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{M}_{\substack{e\\ o}mn}^{(j)}(k_0\boldsymbol{r}) = \nabla \wedge \boldsymbol{r}P_n^m(\cos\theta)Z_n^{(j)}(k_0\boldsymbol{r})\begin{matrix}-\cos(m\varphi)\\ \sin(m\varphi)\end{matrix}$$

$$\boldsymbol{N}_v^{(j)}(k_0\boldsymbol{r}) = \frac{1}{k_0}\nabla \wedge \boldsymbol{M}_v^{(j)}(k_0\boldsymbol{r})$$

$\boldsymbol{r}_<$ 和 $\boldsymbol{r}_>$ 分别表示 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 中较小的和较大的量。取

$$\boldsymbol{E}^s = \sum_v[p_v\boldsymbol{M}_v^{(3)}(k_0\boldsymbol{r}) + q_v\boldsymbol{N}_v^{(3)}(k_0\boldsymbol{r})]$$

通过矩量法可以得到求积分方程(3)数值解的矩阵方程

$$\begin{bmatrix}[D_+] & 0\\ 0 & [D_+]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[A]' & [B]'\\ [E]' & [F]'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{d}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{bmatrix}$$

式中 $\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$ 及 $\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 分别表示散射场及内场的级数展开系数的列向量, 最后得到粒子的散射截面 σ_s, 雷达截面 σ_r 及衰减截面 σ_t 的计算公式分别为

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{k_0^2}(\boldsymbol{p}^{*\prime}D_+\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}^{*\prime}D_+\boldsymbol{q})$$

$$\sigma_r = \frac{4\pi}{k_0^2}\left|\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{b}'(-\boldsymbol{k}_{in})D_-\boldsymbol{q} - \mathrm{i}\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{a}'(-\boldsymbol{k}_{in})D_-\boldsymbol{q}\right|^2 \tag{4}$$

$$\sigma_t = -\frac{4\pi}{k_0^2}R_e\sum_v D_v(p_v + q_v)$$

以上各式中, “′”号表示转置, “*”号表示复共轭, $\boldsymbol{e}_0$ 是入射电场方向的单位矢, $\boldsymbol{k}_{in}$ 是入射波的入射方向单位矢, $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为入射波场矢量级数展开系数的列向量, 对角线矩阵 $[D_+]$ 及 $[D_-]$ 的第 υ 个元素由下式决定

$$[D_\pm] = \pm\frac{\epsilon_m(2n+1)(n-m)!}{4n(n+1)(n+m)!}$$

$$\epsilon_n = \begin{cases}1 & m = 0\\ 2 & m > 0\end{cases}$$

(4)式适用于平行极化回波, 对垂直极化回波, 只需在(4)式中用 $\boldsymbol{k}_{in}\wedge\boldsymbol{e}_0$ 代替 $\boldsymbol{e}_0$ 即可。

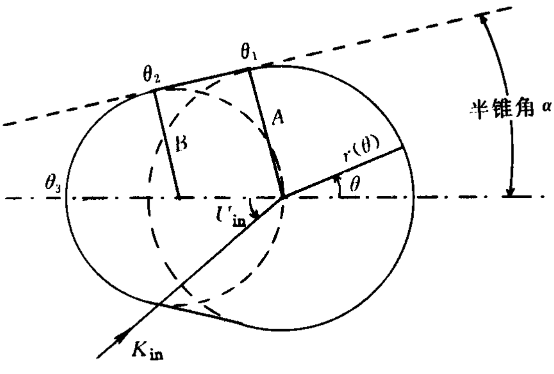

图 1 锥球状粒子几何结构

Fig. 1 Geometry of a tapered-spheric particle

对锥球状粒子, 为使其边界光滑, 便于处理, 可在粒子的锥尖处光滑地连接一个半径为 B 的小球(见图 1), 图 1 中 $\boldsymbol{k}_{in}$ 为入射波入射方向, U_{in} 为入射角, A 为大球的半径, α 为锥球的半顶角, 显然, 锥球粒子的形状和大小完全由 A、B/A 及 α 决定。对锥球状粒子, 选用球坐标系计算矩阵元素, 积分可分成三个区间上的积分和, 区间的三个端点为(参阅图 2)

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{e-\sin^2\alpha}\right) \qquad 0 \le \theta_1 \le 105°$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{(B/A)\sin\alpha\cos\alpha}{1-e-(B/A)\cos^2\alpha}\right) \qquad \theta_1 < \theta < \pi$$

$$\theta_3 = \pi$$

式中
$$e = [1 - (B/A)](1 - \sin\alpha)/2$$

极径 $r(\theta)$ 在三个积分段上的表达式为

$$r_1(\theta) = \frac{e\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left[1 - \left(\frac{e\cos\theta}{\sin\alpha}\right)^2\right]^{1/2} \qquad 0 \le \theta \le \theta_1$$

$$r_2(\theta) = \frac{1 - e}{\sin(\theta - \alpha)} \qquad \theta_1 \le \theta \le \theta_2$$

$$r_3(\theta) = -\frac{1 - B/A - e}{\sin\alpha}\cos\theta + \left[(B/A)^2 - \left(\frac{1 - B/A - e}{\sin\alpha}\right)^2 \sin^2\theta\right]^{1/2} \qquad \theta_2 \le \theta \le \theta_3$$

2　单个锥球状冰雹散射的数值结果

取雷达发射波长 $\lambda = 10cm$ 来分析锥球状冰雹的雷达截面 σ_r 与衰减截面 σ_t 随其尺度、形状及入射角 U_{in} 的变化趋势。图 2 为 $\alpha = 15°$, $B/A = 0.9$, $D = 0.16\ cm$ ($D = 2A$, $\pi D/\lambda = 5.03 \times 10^{-2}$) 的冰粒子的标准化雷达截面 $\sigma_b = \sigma/\pi a^2$、衰减截面 $\sigma_{tb} = \sigma_t/\pi a^2$ 的对数值(dB) 随入射角 U_{in} 的变化曲线。由图可见, 在 $U_{in} = 90$ 处, σ_{rb} 和 σ_{tb} 均为最小值, 而在 $\theta_s = 0°, 180°$ 处, σ_b 和 σ_{tb} 为最大, 这个结果与雷利散射的结果相同。表明当粒子较小时($\pi D/\lambda \ll 1$), 不管粒子的形状如何, 其散射均可看作是雷利散射。随着粒子尺度的增大, σ_{rb} 和 σ_{tb} 随入射角的不同作振荡式的变化(如图 3 和图 4 所示), 这与米散射的结果类似。图 3 与图 2 比较可知, 在 $\alpha = 15°$, $B/A = 0.9$ 的相同条件下, 对于 $D = 1.96\ cm$ ($\pi D/\lambda = 0.62$) 的大冰粒, 其垂直极化回波的 σ_b 和 σ_{tb} 皆随入射方向的不同呈现明显的振荡变化, 但其平行极化回波的相应曲线尚未出现这种变化。图 4 为 $\alpha = 0.9$, $B/A = 0.9$, $D = 3.24\ cm$ ($\pi D/\lambda = 1.02$) 的冰粒的相应曲线, 可以看到随着

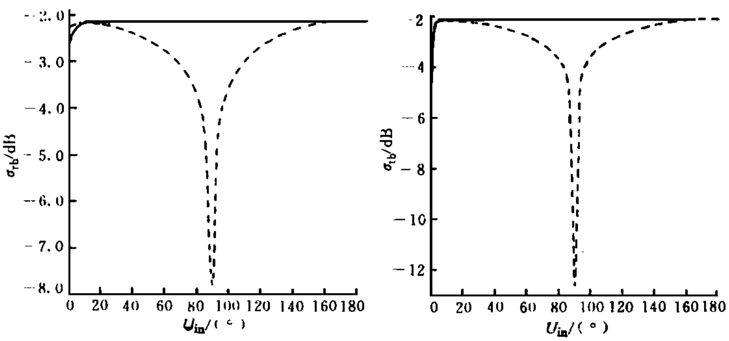

图 2　锥球状小冰粒标准化雷达截面 σ_{rb} 及衰减截面 σ_{tb} 随入射角 U_{in} 的变化
—— 平行极化; - - 垂直极化

Fig. 2　Change in the cross-sections of a normalized radar and attenuation (denoted by σ_{rb} and σ_{tb}, respectively) as a function of incidence U_{in} for a tapered-spheric particle The horizontal (vertical) polarization is given by solid (dashed) line

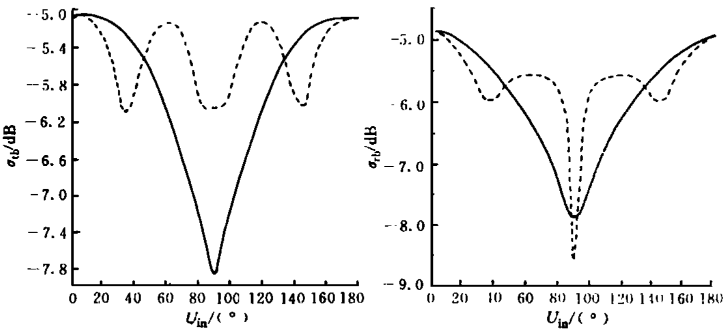

图 3　σ_{rb}、σ_{tb} 随 U_{in} 的变化($D = 1.96\ cm$)
—— 平行极化; - - 垂直极化

Fig. 3　Change in the cross-sections of a normalized radar and attenuation (denoted by σ_{rb} and σ_{tb}, respectively) as a function of incidence U_{in} for a tapered-spheric particle ($D = 1.96\ cm$) The horizontal (vertical) polarization is given by solid (dashed) line

粒子尺度的增大和半锥角 α 的减小, 垂直极化回波和平行极化回波的 σ_{rb}和 σ_{b}随入射角 U_{in}的不同均呈现激烈的振荡式变化。

在考察了锥球状冰粒在不同入射方向的后向散射和衰减状况后, 现在分析冰粒之形状因子 B/A 对散射特性的影响。

图 5 是 α= 1°, D= 2 cm ($\pi D/\lambda$= 0.63) 的锥球状冰粒在平行入射和垂直入射的条件下, 标准化雷达截面 σ_{b}随冰粒形状因子 B/A 变化的结果, 图中实线与虚线分别表示平行极化回波与垂直极化回波的情况。可知当冰粒锥状特征明显时, σ_{b}随 B/A 变化比较缓慢, 但当冰粒向柱状趋近时, 即当(B/A)> 0.6 时, σ_{rb}随(B/A) 值的增大而迅速减小。另外在 U_{in}= 0°方向上平行和垂直极化回波的 σ_{rb}值趋于一致。

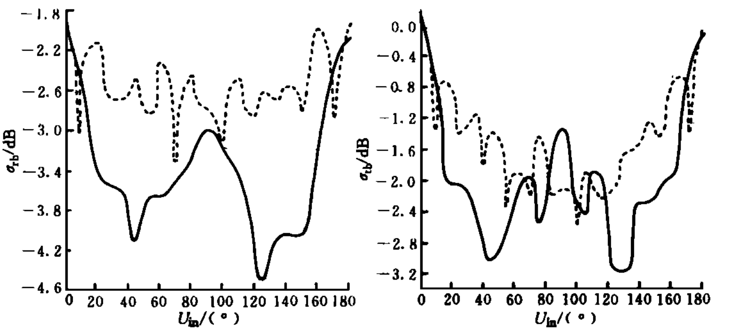

图 4 σ_{rb}、σ_{tb}随 U_{in}的变化(D= 3.24 cm, α= 0.9)
—— 平行极化; - - 垂直极化

Fig. 4 Change in the cross-sections of a normalized radar and attenuation (denoted by σ_{rb} and σ_{tb}, respectively) as a function of incidence U_{in} for a tapered-spheric particle (D= 3.24 cm and α= 0.9)
The horizontal (vertical) polarization is given by solid (dashed) line

锥球状冰粒的衰减还与决定形状的另一因素半锥角 α 有关。图 6 为 B/A= 0.99, D= 1.96 cm 的冰粒在垂直入射条件下, 平行极化回波和垂直极化回波的标准化衰减截面 σ_{tb}随半锥角 α 的变化曲线。可见 σ_{b}随 α 呈波动性变化, 当锥角较小时(α< 10°), σ_{tb}的变化幅度较大, 在 α= 5°处达极小值; 而随着 α 的增大, σ_{b}减小, 在 α = 45 时 σ_{b}达最小值, 上述结果表明粒子的形状因子 B/A 和 α 确是影响粒子散射和衰减的重要因素。

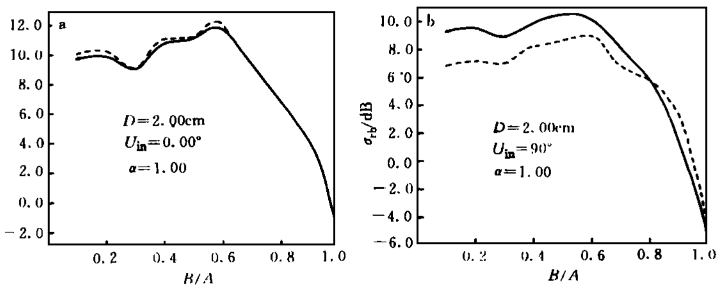

图 5 锥球状冰粒标准化雷达截面 σ_{rb}随形状因子 B/A 的变化
a. 平行入射; b. 垂直入射
—— 平行极化; - - 垂直极化

Fig. 5 The normalized radar cross-section σ_{rb} varying versus shape factor B/A for a tapered-spheric hailstone in the presence of parallel (a) and vertical (b) incidence.
The horizontal (vertical) polarization is given by solid (dashed) line
a. D= 2.00 cm, U_{in}= 0°, α= 1.00; b. U_{in}= 90°

上文讨论了均匀纯冰粒子散射和衰减, 现研究冰水混合的海绵状非均匀锥球形冰雹散射和衰减。对于结构疏松的潮湿雪片、雪团等低密度固体降水粒子和冰球溶解后期冰核破碎时, 以及过冷水滴碰并时的散射问题都须用冰水混合粒子模式来处理, 由于海绵状粒子是由冰和水混合而成, 故复折射指数应取决于水和冰的复折射指数 $m_{水}$、$m_{冰}$ 以及粒子的含水率 w= 1- f, f 为冰占总体积的百分比。则据 *Bohren* 和 *Battan* [] 的结论, 可得冰水混合粒子等效复折射指数 m_{eq}为

$$m_{eq}^2 = \epsilon_{av}$$

而

$$\epsilon_{av} = \frac{(1-f)\epsilon_m + f\beta\epsilon}{(1-f)+f\beta}, \quad \beta = 2\frac{\epsilon_m}{\epsilon-\epsilon_m}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon-\epsilon_m}\lg\frac{\epsilon}{\epsilon_m} - 1\right)$$

其中 $\epsilon_m = m_{水}^2$, $\epsilon = m_{冰}^2$ 分别为水和冰的复介电常数。

图 7 为 $B/A = 0.5$, $D = 4.0\,cm$ ($\pi D/\lambda = 1.26$) 锥球形冰水混合海绵状冰粒标准化散射截面 σ_b和衰减截面 σ_b随冰粒含水率 w 的变化情况。计算中取 $\lambda = 10\,cm$, $m_{水} = 8.99 - i1.47$, $m_{冰} = 1.78 - i0.0024$。

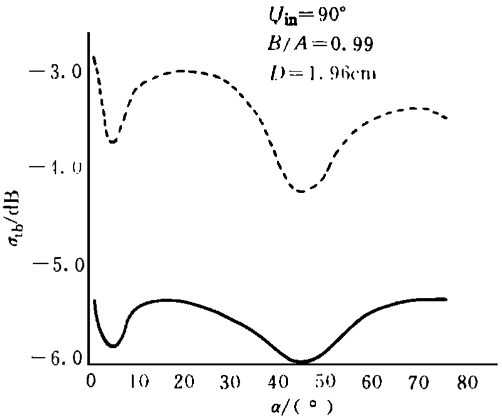

图 6　锥球状冰粒标准化衰减截面 σ_{tb} 随半锥角 α 的变化
—— 平行极化; - - 垂直极化

Fig. 6　The normalized attenuation cross-section σ_{tb} changing as a funciton of semi-tapered angle The horizontal (vertical) polarization is given by solid (dashed) line

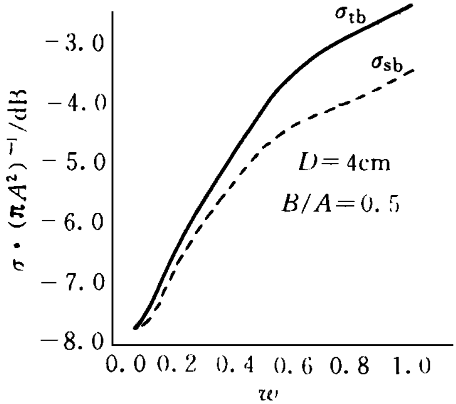

图 7　锥球冰海绵状冰粒标准化散射截面 σ_{sb}(- -) 及衰减截面 σ_t(——) 随冰粒含水率 w 的变化(平行极化)

Fig. 7　Variation in the normalized scattering cross-section σ_{sb} (dashed line) and attenuation cross-section σ_{tb} (solid line) as a function of water content w for a spongy hailstone (for horizontal polarization)

由图 7 可知, 当海绵状锥球粒子中 90% 由冰组成(即 $w = 0.1$) 时, 衰减几乎全由散射引起; 随着含水率的增大, 吸收对衰减的贡献也随之增长, 这一结果与 *Battan*(1962 年) 对球形粒子的计算结果相近。另外, 海绵状锥球形粒子的 σ_b和 σ_b均随其含水率的增加而迅速增长, 可见散射体介质结构状况对其散射和衰减特性亦有明显的影响。

3　结　语

本文分析了采用积分方程法所得部分锥球状冰雹的散射和衰减结果, 可知:

(1) 尺度较小的锥球状粒子的散射和衰减特性亦可按雷利散射处理。

(2) 锥球状均匀冰粒的散射和衰减特性对粒子尺度的影响十分敏感, 随粒子尺度的增大, 标准化雷达截面和衰减截面随入射方向变化曲线的振荡加强。

(3) 海绵状非均匀锥球形冰粒的含水率较小时, 其衰减主要由散射引起, 当含水率 $w > 0.3$ 时, 必须考虑粒子的吸收作用; 且冰粒的散射和衰减随其含水率的增加而迅速增加, 说明散射体的结构对其散射和衰减特性有显著影响。

本文所采用的理论和数值方法可应用于任意尺度轴对称形状(球、旋转椭球、锥球、圆柱等) 的均质及非均质粒子的散射和衰减问题的研究。

参 考 文 献

1 Bohren C F, Battan L J. Radar backscattering of microwaves by spongy ice sphere. JAS, 1982, 39: 2623～2628
2 王宝瑞, 嵇驿民 . 分层均匀旋转椭球体对偏振电磁波的散射理论及数值计算 . 大气科学, 1989, 13(3): 329～342
3 嵇驿民, 王宝瑞 . 扁旋转椭球状冰水混合粒子对偏振雷达波的散射 . 南京气象学院学报, 1989, 12(1): 56～66
4 张培昌, 王宝瑞, 嵇驿民 . 椭球状降水粒子群微波特性的理论计算 . 南京气象学院学报, 1990, 13(2): 158～166
5 嵇驿民, 王宝瑞, 张培昌 . 计算雷达截面的积分方程法 . 南京气象学院学报, 1991, 14(1): 61～72
6 Barber P, Yeh C. Scattering of electromagnetic waves by arbitrarily shaped dielectric bodies. Applied Optics, 1975, 14(2): 2864～2872
7 Mittra R 著. 计算机技术在电磁学中的应用. 金元松译. 北京: 人民邮电出版社, 1983. 107～173
8 张培昌, 戴铁丕, 杜秉玉, 等 . 雷达气象学 . 北京: 气象出版社, 1988

ELECTROMAGNETIC SCATTERING/ATTENUATION OF HOMO-GENEOUS AND HETEROGENEOUS TAPERED-SPHERIC HAILSTONES

Wang Baorui[1)] Xi Linyan[2)] Zhang Peichang[3)] Jiang Xiuwu[1)]

(1) Department of Basic Science, NIM, Nanjing 210044, 2) Albeta University, Canada

3) Department of Atmospheric Physics, NIM, Nanjing 210044)

Abstract Numerical results of polarization radar electromagnetic scattering and attenuation of homo- and heterogeneous tapered-spheric hailstones are investigated by using the integral equation method with emphasis on the influence of the scales and shapes.

Keywords integral equation method, tapered-spheric hailstones, heterogeneous dielectrics, scattering, attenuation