南京气象学院学报
第15卷 第2期 Journal of Nanjing Institute Vol. 15 No. 2
1992年6月 of Meteorology Jun. 1992

边界层中非线性平流对变性能量的影响

何建中
（南京气象学院）

摘要 本文研究了由于边界层内非线性平流作用所引起的湍流边界层对大气运动中的动能耗散率即变性能量的影响。得到了根据宏观外参数来求边界层中动能耗散的公式。结果表明，非线性平流作用将改变变性能量的大小，其影响也随着系统特征的改变而改变，进一步改进了对变性能量的认识。文中还将非线性平流对变性能量影响的结果与地转动量假定下的相应结果加以比较与分析。

关键词 边界层，变性能量，非线性平流，摄动法

大气动能的来源和消耗机制对研究天气系统的生消、发展是很重要的。由于大气的粘性及边界层内的湍流摩擦作用会使大气动能不断消耗转化为脉动动能的能量，正确估计其转化大小即所谓"变性能量"对分析动能的收支是很有意义的。以往研究用动能平衡方程或粗浅边界层模式来数值估计，赵鸣[1]利用边界层相似理论和阻力规律通过数值计算方法计算变性能量，但上述工作是假定水平均匀、定常条件下得到的，既没有考虑非线性平流作用的影响，也未考虑系统特征。而事实上，非线性平流作用是造成局地天气系统差异的一个原因[2]。本文从边界层运动方程出发，利用摄动法得到了非线性平流与变性能量的关系，改进了以往的结果，进一步加深了对变性能量的认识。

1 计算公式与初步分析

通常边界层单位面积气柱内的变性能量为

$$E_t = -\int_0^h \left[u\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) + v\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]\rho dz \qquad (1)$$

收稿日期：1990—11—27

h 为边界层顶高度。设粘性系数 k 为常数，边界层无因次运动方程为[3]

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^{*2}} = (v_g^* - v^*) + R_0\left(\dfrac{\partial}{\partial t^*} + u^*\dfrac{\partial}{\partial x^*} + v^*\dfrac{\partial}{\partial y^*} + R_0\overline{W}^*\dfrac{\partial}{\partial \eta^*}\right)u^* \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 v^*}{\partial \eta^{*2}} = -(u_g^* - u^*) + R_0\left(\dfrac{\partial}{\partial t^*} + u^*\dfrac{\partial}{\partial x^*} + v^*\dfrac{\partial}{\partial y^*} + R_0\overline{W}^*\dfrac{\partial}{\partial \eta^*}\right)v^*\end{cases} \tag{2}$$

标有“*”号的量为无因次量。其中，$R_0 = V/fL$，$\alpha = \sqrt{f/2k}$，$\eta^* = \alpha H Z^*$，$\overline{W}^* = \alpha H W^*$，$f$ 为科氏参数，L 为水平尺度，V 为水平速度尺度，H 为气层高度。

设密度 ρ 为常数，同样将(1)式改写为

$$E_t = -\rho\sqrt{2kf}V^2\int_0^{\alpha h}\left(\frac{u^*}{2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^{*2}} + \frac{v^*}{2}\frac{\partial^2 v^*}{\partial \eta^{*2}}\right)d\eta^* \tag{3}$$

以下为方便略去“*”号。将(2)式代入(3)式得

$$E_t = -\rho\sqrt{2kf}V^2\int_0^{\alpha h}\left[(uv_g - vu_g) + R_0\left(u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt}\right)\right]d\eta \tag{4}$$

式中，$\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial x} + v\dfrac{\partial}{\partial y} + R_0\overline{W}\dfrac{\partial}{\partial \eta}$。

采用摄动法求方程组(2)的近似解，即有

$$u = u_0 + R_0 u_1 + 0(R_0^2), V = V_0 + R_0 V_1 + 0(R_0^2) \tag{5}$$

将(5)式代入(4)式，并取一级近似得

$$E_t = E_{t0} + E_{t1} + E_{t2} = (-\rho\sqrt{2kf}V^2)\int_0^{\alpha h}(u_0 v_g - v_0 u_g)d\eta +$$

$$(-\rho\sqrt{2kf}V^2)R_0\int_0^{\alpha h}(u_1 v_g - v_1 u_g)d\eta + R_0(-\rho\sqrt{2kf}V^2)\int_0^{\alpha h}\left(u_0\frac{du_0}{dt} + v_0\frac{dv_0}{dt}\right)d\eta \tag{6}$$

(6)式中，$\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial x} + v\dfrac{\partial}{\partial y}$。$E_{t0}$ 与 E_{t1} 分别为风速零级、一级近似时气压梯度力做功的能量。E_{t2} 则为风速零级近似时惯性力做功的能量。

由(6)式知，变性能量 E_t 为不考虑非线性平流作用时的 E_{t0}（称为线性变性能量项）加上非线性平流作用时的 $E_{t1} + E_{t2}$（称为非线性变性能量项）。

设 $h = \pi/\alpha$ 为边界层顶高度（梯度风高度）。并利用(2)式的风速零级近似，积分得

$$E_{t0} = (\rho\sqrt{2kf}V^2)K_g(1 + e^{-\pi}) \tag{7}$$

其中，$K_g = \dfrac{1}{2}(u_g^2 + v_g^2)$ 为地转风动能。上式即为不考虑非线性平流作用由经典 Ekman 螺线估计的变性能量公式。该式中 E_{t0} 与 K_g、K 及 f 的平方根成正比，故同样地转风条件下，无论何种气压系统及平流作用，变性能量大小不变，即与系统无关，且随纬度增加而增加，f 对变性能量影响同样也不依赖平流。以上为线性时的结果。

利用(2)式的风速一级近似，并用风速零级近似计算出惯性力所做的功，得非线性变性能量

$$E_{t1}+E_{t2}=-(\rho\sqrt{2kf}V^2)R_0\left[\left(\frac{\partial K_g}{\partial t}-B\right)\frac{\pi e^{-\pi}}{2}+\left(\frac{A+3B+C}{10}\right)(1+e^{-3\pi})+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial K_g}{\partial t}-\frac{20A+69B+27C}{60}\right)(1-e^{-2\pi})+\left(-\frac{1}{4}\frac{\partial K_g}{\partial t}+\frac{3}{4}u_g\frac{\partial v_g}{\partial t}-\frac{3}{4}v_g\frac{\partial u_g}{\partial t}+\frac{-20A+51B+63C}{60}\right)(1+e^{-\pi})\right] \quad (8)$$

其中，$A=-K_g\zeta_g$，$B=(u_g^2-v_g^2)A_{yy}-2u_gv_gA_{xy}$，$C=(u_g^2-v_g^2)A_{xy}-2u_gv_gA_{yy}$（$\zeta_g=\frac{\partial v_g}{\partial x}-\frac{\partial u_g}{\partial y}$为地转风涡度，$A_{yy}=\frac{\partial v_g}{\partial y}$，$A_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_g}{\partial x}+\frac{\partial u_g}{\partial y}\right)$为地转风形变率）。将(7)、(8)两式代入(6)式则得

$$E_t=(\rho\sqrt{2kf}V^2)\{K_g(1+e^{-\pi})-R_0\left[\left(\frac{\partial K_g}{\partial t}-B\right)\frac{\pi e^{-\pi}}{2}+\left(\frac{A+3B+C}{10}\right)(1+e^{-3\pi})+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial K_g}{\partial t}-\frac{20A+69B+27C}{60}\right)(1-e^{-2\pi})+\left(-\frac{1}{4}\frac{\partial K_g}{\partial t}+\frac{3}{4}u_g\frac{\partial v_g}{\partial t}-\frac{3}{4}v_g\frac{\partial u_g}{\partial t}+\frac{-20A+51B+63C}{60}\right)(1+e^{-\pi})\right]\} \quad (9)$$

(9)式即为考虑非线性平流作用后 $R_0\neq0$，变性能量与平流及其他参数的关系。因而可用地转风、地转风局地时变、地转涡度及形变率等外参数通过 (9)式来估计变性能量。

由于考虑了非线性平流作用影响，E_t 的形式就变得复杂了，除了与线性变性能量项 E_{t0} 有关外，还必须加上非线性变性能量项 $E_{t1}+E_{t2}$ 的修正。而这种非线性作用的修正项即使在同样地转风、纬度及粘性系数条件下也可以是不同的。而且下面将进一步说明这种非线性修正项依赖于系统特征。因此，E_t 也依赖于气压系统。

如考虑定常系统，为突出地转涡度的作用，不妨设形变率为零（一般情形下节讨论）。利用 $e^{-3\pi}\doteq0$、$e^{-2\pi}\doteq0$、$e^{-\pi}<<1$，则由(9)式得

$$E_t=(\rho\sqrt{2kf}V^2)K_g\left(1-\frac{17}{30}R_0\zeta_g\right) \quad (10)$$

由上式可知，当 $R_0\neq0$（考虑平流作用），正负涡度区对 E_t 的贡献是不一样的。气旋（反气旋）系统 $\zeta_g>0$（$\zeta_g<0$），非线性平流作用改变了 Ekman 层中风速分布结构特征，从而减小（增加）了湍流粘性对动能的耗散。当 $R_0=0$（不考虑平流作用），无论何种气压系统，变性能量大小相同。

因此，在不同的气压系统中，非线性平流作用对 E_t 贡献是相反的，有不同的 E_t 分布特点，这一特征在经典的由 Ekman 解计算变性能量 E_{t0} 中是得不到反映的，这是非线性平

流作用的一个显著特征，也是本文得到的一个新的结果。

2 变性能量与外参数的关系

为使我们对 E_t 与外参数的关系有一较为清晰的图象，现用一个简单的圆形涡旋作为个例，分析与讨论在这样的气压场中，E_t 与外参数的关系。设无因次气压场的分布为

$$\varphi = \pm\left(1-\frac{\alpha}{2}r^2\right)\exp\left(-\frac{\alpha}{2}r^2\right) \tag{11}$$

正号对应于反气旋或高压区，负号对应于气旋或低压区。个例计算中取 $\alpha=0.5$。

2.1 变性能量与非线性平流作用的关系

由(9)式，R_0 数大，平流作用强；反之亦然。因此，E_t 与平流作用关系也反映在与 R_0 数的大小关系上。图 1 为无量纲 $\tilde{E}_t(E_t/E_{t0})$ 随 R_0 数、系统的变化。由图 1 知，R_0 数对 $\tilde{E}_t$ 的影响随系统特征的改变而改变。在气旋(反气旋)系统中，$\tilde{E}_t$ 随 R_0 数增加而减小(增大)。而在无平流作用时与气压系统无关，且 $\tilde{E}_t$ 的值在反气旋中大于在气旋系统中，而无平流时的值介于平流作用时两种系统的值之间。如果在相同的 E_{t0} 条件下(相同 K_x、f、K)，上述无量纲数的大小关系就反映了变性能量 E_t 的大小关系。另外，$\tilde{E}_t$ 与 r 也有一定关系。在同样 R_0 数条件下，$\tilde{E}_t$ 取决于地转涡度及其形变率总的贡献。本例中，地转涡度随 r 减小而增加，形变率随 r 减小而减小。总的效应为随 r 减小略有增加。因此，r 越小(大)表明非线性平流作用越强(弱)。故在气旋系统中，$\tilde{E}_t$ 随 r 增加而增加，反气旋中相反。

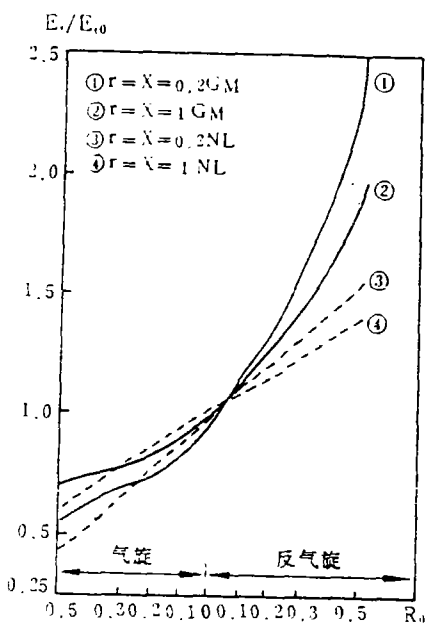

图 1　单位截面积边界层气柱中的无量纲变性能量数随系统 R_0 数、r 的变化
(NL 为摄动法结果，GM 为地转动量近似下的结果)

在以往研究中，既没考虑平流作用，又没考虑气压系统。无论何种系统，平流作用强弱，同样的地转风条件下 E_t 是相同的。而本文考虑了这些因子，说明了即使同样地转风条件，考虑了平流作用及系统特征时，E_t 大小是不同的。本文得到了诸因子影响的关系，结果更精确。

与地转动量近似下结果*(GM)比较，在反气旋中，GM 结果比摄动法结果(NL)对线性结果 E_{t0}的修正大。且其差别随 R_0 数增加而增大，当 R_0 数很小时，其差别也很小。在气旋中，两种结果差别比反气旋中更小些，当 R_0 数很小时，NL 结果比 GM 结果大。当 R_0 数增大时，NL 结果比 GM 结果小。因此，GM 与 NL 结果在不同系统、R_0 数是不一致的。但无论 NL 或 GM 结果，对线性时 E_{t0}的修正及与气压系统的关系是一致的，均反映了非线性平流的作用。

2.2 地转风速及其时变对变性能量的影响

由(9)式可见，无论线性项 E_{t0}及非线性项 E_{t1}、E_{t2}的大小均与地转风平方有关，与 K 的平方根有关。因此，在其他条件相同、地转风及 K 大时，相应非线性平流作用引起的非线性修正项 E_{t1}、E_{t2}要大些，反之亦然。地转风局地时变也与 E_{t1}、E_{t2}有关。为突出非定常变化，不妨设地转风水平均匀($A=B=C=0$)，此时(9)式可简化为

$$E_t = (\rho\sqrt{2kf}V^2)\left[K_g - R_0\left(\frac{1}{4}\frac{\partial K_g}{\partial t} + \frac{3}{4}\vec{K}\cdot\vec{V}_g \wedge \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t}\right)\right] \tag{12}$$

设地转风方向与其时变方向平行，则 $\vec{V}_g \wedge \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} = 0$，上式可以写为

$$E_t = (\rho\sqrt{2kf}V^2)\left(K_g - \frac{R_0}{4}\frac{\partial K_g}{\partial t}\right) \tag{13}$$

因此，线性项 E_{t0}与地转风局地时变无关。而非线性项则与地转风局地时变有关。当 $\frac{\partial K_g}{\partial t} < 0$($\frac{\partial K_g}{\partial t} > 0$)时，即地转动能减小(增加)时，非线性项为正(负)，非定常变化作用增加(减小)了湍流粘性对动能的耗散。对于一般情形可由(12)式来决定地转风对 E_t 的影响，在此不作详细分析。

2.3 纬度的影响

纬度的变化对 E_t 的影响比地转风速等因子的影响要复杂。(9)式可改写为

$$E_t = (\rho\sqrt{2kf}V^2)\left[K_g(1+e^{-\pi}) + R_0 P\right] \tag{14}$$

其中，$P = -\left[\left(\frac{\partial K_g}{\partial t} - B\right)\frac{\pi e^{-\pi}}{2} + \left(\frac{A+3B+C}{10}\right)(1+e^{-3\pi}) + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial K_g}{\partial t} - \frac{20A+69B+27C}{60}\right)\right.$
$\left.\cdot(1-e^{-2\pi}) + \left(-\frac{1}{4}\frac{\partial K_g}{\partial t} + \frac{3}{4}u_g\frac{\partial v_g}{\partial t} - \frac{3}{4}V_g\frac{\partial u_g}{\partial t} + \frac{-20A+51B+63C}{60}\right)(1+e^{-\pi})\right]$。$P$ 与 f 无关。一般对给定系统及其非定常变化可计算出 P 值。对本例而言，在反气旋(气旋)系统

---

* 地转动量近似：$\frac{du}{dt} \doteq \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)u_g$，$\frac{dv}{dt} \doteq \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)v_g$ 利用该近似可求得相应结果

中，$P>0(P<0)$。如进一步设 $a=\rho\sqrt{2kf}V^2K_e(1+e^{-\pi})$，$b=\frac{\rho\sqrt{2k}}{L}V^3\cdot P$，则(14)式可写成

$$E_t=a\sqrt{f}+\frac{b}{\sqrt{f}} \tag{15}$$

从(15)式得，线性项 $a\sqrt{f}$ 与 f 平方根成正比($a>0$)，即任何系统，线性项变性能量随纬度增加而增大。而非线性变性能量项 $b/\sqrt{f}$ 与 f 关系依赖于 b 或 P 的正负。而 P 的符号取决于给定的系统。因此，非线性修正项与 f 关系也依赖于天气系统特征。在本个例中，当为反气旋($P>0$)，非线性变性能量与 f 平方根成反比，即随纬度增加而减小；当为气旋($P<0$)，其非线性变性能量随纬度增加而增加。因此，纬度对总的变性能量 E_t 的关系依赖于系统特征。在系统特征为 $P<0$ 时(本例中气旋系统)，线性项与非线性项中 f 对 E_t 贡献一致，故 E_t 随 f 增加而增加。而在系统特征为 $P>0$ 时(反气旋系统)，线性项与非线性项中 f 对 E_t 贡献相反。故 E_t 随 f 的关系取决于线性与非线性项二者综合贡献。由(15)式可得 $P>0$ 时 f 与 E_t 的函数关系图象(图2)。即存在一临界纬度 $f_0=b/a$，此处两者作用相同(各为 $\sqrt{ab}$)，总的 E_t 取最小值 $2\sqrt{ab}$。当 $f>f_0(f<f_0)$时，线性与非线性两者总的效应为随 f 增加 E_t 增加(减小)。因此，纬度变化对 E_t 影响也依赖于系统特征。不同的气压特征其结论是不同的，甚至是相反的。在其他参数相同条件下，在 $P<0$ 的系统中，E_t 随 f 增加而增加，而在 $P>0$ 的系统中，E_t 随 f 增加就不一定增加了，取决于非线性与线性项两者作用的综合效应，即取决于在临界纬度北面还是南面。这一结论与以往研究(中性正压，E_t 随 f 增加而增加)不完全一致。以往结果只适用于无平流作用，而本文结果更具有普遍意义。

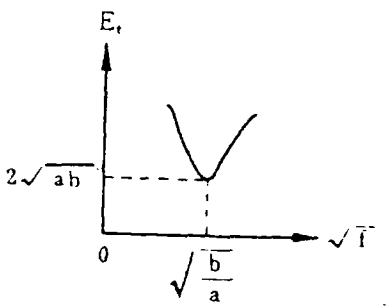

图2　纬度与变性能量的关系($P>0$)

表1在 $v=30\text{m/s}$，$L=10^6\text{m}$ 时，给出了 $f=1.3\cdot10^{-4}\text{s}^{-1}$ 及 10^{-4} 与 $0.7\cdot10^{-4}\text{s}^{-1}$ 时的结果。表1中 $E_\infty=\rho V_g^2\sqrt{\frac{k\cdot10^{-4}}{2}}(1+e^{-\pi})$ 为纬度参数 f 取 10^{-4}s^{-1} 时的线性变性能量，如取 $\rho=1.29\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$，$V_g=10\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，$k=5\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ 则 $E_\infty=2.1265\text{Jm}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$。表1结果也验证了上述结论(本例中，因 $f>f_0$，故 E_t 随 f 增加而增大)。但从 GM 结果可见反气旋中($r=0.2$ 处)，f 增加，E_t 反而减小。因此无论以 GM 近似出发或从摄动法出发考虑非线性项的修正其所得结论是一致的

表1 纬度对无量纲变性能量的影响

$f(s^{-1})$		$0.7\cdot10^{-4}$				10^{-4}				$1.3\cdot10^{-4}$			
$r=x,y=0$		$r=1$		$r=0.2$		$r=1$		$r=0.2$		$r=1$		$r=0.2$	
方法		NL	GM	NL	GM	NL	GM	NL	GM	NL	GM	NL	GM
气	①	0.84	0.84	0.84	0.84	1	1	1	1	1.14	1.14	1.14	1.14
	②	−0.29	0.68	−0.4	0.59	−0.24	0.76	−0.33	0.68	−0.21	0.83	−0.29	0.71
旋	③	0.55	0.57	0.44	0.49	0.76	0.76	0.67	0.68	0.93	0.95	0.85	0.81
无	①	0.84	0.84	0.84	0.84	1	1	1	1	1.14	1.14	1.14	1.14
平流	②	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
作用	③	0.84	0.84	0.84	0.84	1	1	1	1	1.14	1.14	1.14	1.14
反	①	0.84	0.84	0.84	0.84	1	1	1	1	1.14	1.14	1.14	1.14
气	②	0.28	1.7	0.4	2.26	0.24	1.42	0.33	1.69	0.21	1.31	0.29	1.47
旋	③	1.12	1.42	1.24	1.89	1.24	1.42	1.33	1.69	1.35	1.48	1.43	1.62

①线性贡献 E_{n0}/E_{00} ②非线性贡献$(E_{n1}+E_{n2})/E_{00}(NL)$与 $E_n/E_{00}(GM)$ ③ 总贡献 E_t/E_{00}

3 动能耗散的时间尺度

刚金[4]假定大气中动能耗散集中于边界层内，求出了线性条件下动能耗散的时间尺度。用本文结果与之比较。为简单起见，不妨设线性项 E_{n0}的速度不变，使单位面积大气总能量全部耗散完的时间 P 为 100h[4]。表2给出了其它条件与文[4]相同，而在不同气压系统中，不同平流作用即 R_0 数与 r 下的 P。与[4]比较，[4]的结果仅为不考虑平流作用的线性结果，而本文结果更精确些，考虑了非线性修正作用，反映了耗散时间尺度与气压系统、平流作用等外参数关系。本文结果(NL)与 GM 结果相比，反气旋中，NL 结果偏大。气旋中，小 R_0 数时，GM 结果偏大，大 R_0 数时，NL 结果偏大。但两者对于非线性项对耗散时间尺度的总体效应是一致的。

表2 动能全部耗散的时间尺度 $P(h)$

系统		反气旋					气旋			
R_0		0.5	0.3	0.2	0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.5
$r=1$	NL	71	81	86	93	100	109	119	132	167
	GM	53	70	80	90		111	121	132	156
$r=0.2$	NL	54	75	82	90	100	112	128	149	227
	GM	36	59	75	86		115	132	147	182

4 结 语

考虑了非线性平流作用后，非线性平流作用将改变变性能量的大小。即使一级近似下，非线性修正项也是显著的，而且其影响也随着系统特征改变而改变。纬度对变性能量的贡献也依赖于气压系统，改进了以往结果，进一步加深了对变性能量的认识，对正确分析动能的收支有一定的意义。

参 考 文 献

1 赵鸣. 气象学报，1989；47(3)：347－352

2 *Charney J G, Devore J G. JAS*，1979；36：1205－1216

3 伍荣生. 气象学报，1984；42(3)：269－278

4 刚金. 动力气象学基础，下册. 高等教育出版社，1958；533

EFFECTS OF NONLINEAR ADVECTION IN THE PBL ON THE DISSIPATION OF THE ATMOSPHERIC KINETIC ENERGY

He Jianzhong

(Nanjing Institute of Meteorology)

Abstract The effects of nonlinear advection in the PBL on the dissipation of the atmospheric kinetic energy (DAKE) are studied. The DAKE formula involving large－scale parameters are thus determined. Results show that the effects of nonlinear advection will change the magnitude of the DAKE, depending on the characteristic features of the pressure pattern. Hence, our knowledge of the DAKE will be further improved. comparison is also made of the above results with those obtained under the assumption of the geostrophic momentum approximation herein.

Key words PBL, the dissipation of kinetic energy, nonlinearity, perturbation method