南京气象学院学报
一九八五年　第二期

斜压不稳定问题中的摩擦和对流凝结加热作用：线性理论

余志豪　郑维忠

（南京大学气象系）

提　　要

Pedlosky, J. 利用两层准地转模式，在无摩擦的β平面和有摩擦的f平面上分别讨论了纬向基本流的斜压不稳定问题。本文在此基础上作了改进，讨论β平面上具有摩擦和对流凝结加热的斜压不稳定问题。文中只给出线性部分的结果，非线性部分将另文发表。

所得结果均可用临界切变(U_C^*)—波数(A^{*2})曲线表示，再由此分析线性斜压不稳定问题中β效应、摩擦和对流加热的作用和影响。分析指出，β效应不但起着增稳作用，还与摩擦和对流加热作用相结合使临界曲线发生不对称现象，即绝对值相同的正负切变其稳定性可以不同。摩擦(r)亦起着增稳作用，但是弱摩擦和β效应相结合，反而比无摩擦时β效应的稳定性要小。对流加热(m^*)总是起着斜压不稳定增长作用，並且当其强度$m^*>1$时使得摩擦作用亦变成减稳。在$m^*<1$而且上下层都有摩擦的条件下，本模式具有$A^{*2}=1^{*2}$的长波截断。而短波截断的波数随加热增强($m^*\to1$)而无限增加。在临界曲线族上，还出现了中波截断。

一、引　　言

斜压不稳定理论首先由赵九章[1]、Charney, J.G.[2]和Eady, E.T.[3]提出。Eady考虑了无β效应的一个简单斜压连续模式，该模式揭示了斜压不稳定的基本特征。Charney考虑β效应，提出了一个比较近于实际的斜压不稳定模式，但欲进一步完整地考虑不稳定性问题尚有一定的困难。Pedlosky[4]采用Phillips两层均质斜压模式，进一步讨论了这些问题。他指出：在无摩擦而仅有β效应时，存在着临界垂直切变，並且β效

1984年12月13日收到，1985年4月22日收到修改稿

应是增稳的。当基本流的垂直切变超过临界值时，扰动就会增长，反之扰动就会衰减。在有摩擦而无β效应时，也存在临界垂直切变，摩擦作用也是增稳的。另外，Pedlosky[5]还在 f 平面上研究了上下层具有不同摩擦作用的情况。结果发现，在上层摩擦作用消失但下层摩擦作用存在时，则无临界的垂直切变，而仅有临界的Froude数。

大气由于下边界的摩擦作用，有时可促使发生对流凝结现象，相应地就会释放潜热並加热大气。Chang, C.P.[6] 指出这种加热现象可引起波动的增长，李崇银[7] 亦得出类似的结果。

本文综合考虑上述诸方面情况，提出一个β平面两层斜压模式，来讨论同时具有上下层摩擦作用和对流凝结加热时的斜压不稳定的线性问题，以期取得进一步的结论。

二、模式和稳定性判式

由于中高纬度大尺度动力学问题，一般均可取准地转理论假定进行讨论，故在本模式中采用无量纲准地转涡度方程和热力学方程如下：

$$\frac{d^{(0)}}{dt}(\zeta^{(0)}+\beta y)=\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_s W^{(1)}) \tag{1}$$

$$\frac{d^{(0)}}{dt}\theta^{(0)}+\tilde{S}W^{(1)}=H \tag{2}$$

式中上标“0”和“1”分别表示变量的零阶和一阶量，例如对于涡度ζ，即有

$$\zeta=\zeta^{(0)}+\varepsilon\zeta^{(1)}+\cdots$$

其中ε为 Rossby 数。H为加热率，$\tilde{S}$为常值静力稳定度参数，其余都为常用符号。对时间的完全导数，取

$$\frac{d^{(0)}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u^{(0)}\frac{\partial}{\partial x}+v^{(0)}\frac{\partial}{\partial y}$$

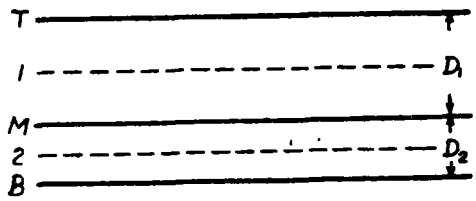

图 1 模式的分层情况

把大气划分为两层，其上下层厚度分别为 D_1 和 D_2，总厚度为 D，如图 1 所示。于是将(1)式写在第一层和第二层上，则有

$$\frac{d^{(0)}}{dt}[\zeta^{(0)}(x,y,z_1,t)+\beta y]=\frac{\rho_s(z_T)W^{(1)}(z_T)-\rho_s(z_M)W^{(1)}(z_M)}{\rho_s(z_1)D_1/D} \tag{3}$$

$$\frac{d^{(0)}}{dt}[\zeta^{(0)}(x,y,z_2,t)+\beta y]=\frac{\rho_s(z_M)W^{(1)}(z_M)-\rho_s(z_B)W^{(1)}(z_B)}{\rho_s(z_2)D_2/D} \tag{4}$$

这里的下标表示在相应层上的值。将(2)式写在中间(M)层上，得到该层上 $W^{(1)}$ 的表

达式为

$$W^{(1)}(z_M)=\frac{H(z_M)}{\widetilde{S}(z_M)}-\frac{d^{(0)}}{dt}\left\{\frac{F_r\theta_s(z_M)}{\theta_s(z_1)-\theta_s(z_2)}\left[P^{(0)}(z_1)-P^{(0)}(z_2)\right]\right\}$$

其中 $F_r=f^2L^2/gD$ 为 Froude 数，P 为气压，L 是特征长度。不考虑地形，上下边界条件分别为

$$W^{(1)}(z_T)=-\frac{E_{VT}^{\frac{1}{2}}}{2\varepsilon}\zeta^{(0)}(x,y,z_1)$$

$$W^{(0)}(z_B)=\frac{E_{VB}^{\frac{1}{2}}}{2\varepsilon}\zeta^{(0)}(x,y,z_2)$$

其中 $E_V=2Av/fD^2$ 为垂直 Ekman 数。于是，(3)和(4)式可改写为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\nabla^2\psi_1-F(\psi_1-\psi_2)+\beta y\right]$$
$$=-r_1\nabla^2\psi_1-H(z_M)/S \qquad (5)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\nabla^2\psi_2+F(\psi_1-\psi_2)+\beta y\right]$$
$$=-r_2\nabla^2\psi_2+H(z_M)/S \qquad (6)$$

其中已假定 $D_1\rho_S(z_1)=D_2\rho_S(z_2)$，並且

$$S=\frac{\rho_s(z_2)D_2/D}{\rho_s(z_M)}\widetilde{S}(z_M)$$

$$r_1=\frac{\rho_s(z_T)}{\rho_s(z_1)D_1/D}\frac{E_{VT}^{\frac{1}{2}}}{2\varepsilon}$$

$$r_2=\frac{\rho_s(z_B)}{\rho_s(z_2)D_2/D}\frac{E_{VB}^{\frac{1}{2}}}{2\varepsilon}$$

$$F=\frac{\rho_s(z_M)F_r\theta_s(z_M)}{\rho_s(z_1)[\theta_s(z_1)-\theta_s(z_2)]D_1/D}$$

$$\psi_1=p^{(0)}\ 及\ u^{(0)}=-\partial\psi/\partial y,\quad v^{(0)}=\partial\psi/\partial x$$

对于H项如仅考虑对流凝结加热，可采用如下的线性方案[6]

$$H(z_M)=\tilde{m}W^{(1)}(z_B)=\begin{cases}\tilde{m}r_2\nabla^2\psi_2 & (\nabla^2\psi_2>0)\\ 0 & (\nabla^2\psi_2\leqslant 0)\end{cases}$$

式中$\tilde{m}$为比例常数。

考虑

$$\psi_n=\overline{\Psi}_n(y)+\phi_n(x,y,t)\qquad n=1,\ 2$$

其中$\overline{\Psi}_n(y)$为基本气流，它对应纯纬向气流为

$$U_n(y)=-\partial\overline{\Psi}_n/\partial y\qquad n=1,\ 2$$

$\phi_n(x,\ y,\ t)$为扰动流函数。本模式暂不考虑水平切变引起的正压不稳定性，即U_n与y无关，但由于斜压性$U_1\neq U_2$。因此(5)式和(6)式可写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_1\frac{\partial}{\partial x}\right)q_1+\frac{\partial\phi_1}{\partial x}(\beta+FU_s)+J(\phi_1,q_1)+r_1\nabla^2\phi_1+m^*r_2\nabla^2\phi_2=0\quad(7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_2\frac{\partial}{\partial x}\right)q_2+\frac{\partial\phi_2}{\partial x}(\beta-FU_s)+J(\phi_2,q_2)+r_2\nabla^2\phi_2-m^*r_2\nabla^2\phi_2=0\quad(8)$$

式中

$$(q_n=\nabla^2\phi_n+(-1)^nF(\phi_1-\phi_2)\qquad n=1,2$$

$$U_s=U_1-U_2$$

$$J(\phi_n,q_n)=\frac{\partial\phi_n}{\partial x}\frac{\partial q_n}{\partial y}-\frac{\partial\phi_n}{\partial y}\frac{\partial q_n}{\partial x}\qquad n=1,2$$

$$m^*=\tilde{m}/S$$

与(7)和(8)式相应的边界条件为

$$\partial\phi_n/\partial x=0\ 和\ \partial^2\overline{\phi_n}/\partial t\partial y=0\quad 在\ y=0,\ 1上,\ n=1,\ 2\qquad(9)$$

其中$\overline{\phi_n}$是ϕ_n对x方向求平均值。

当扰动相对于基本流函数很小时，(7)和(8)式的线性化形式为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_1\frac{\partial}{\partial x}\right)q_1+\frac{\partial\phi_1}{\partial x}(\beta+FU_s)+r_1\nabla^2\phi_1+m^*r_2\nabla^2\phi_2=0\quad(10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_2\frac{\partial}{\partial x}\right)q_2+\frac{\partial\phi_2}{\partial x}(\beta-FU_s)+r_2\nabla^2\phi_2-m^*r_2\nabla^2\phi_2=0\quad(11)$$

设解的形式为

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} e^{i\theta} \sin ly + (*) \tag{12}$$

其中 $\theta = k(x - ct)$，$l = n\pi$，$n = 0, 1, 2, \cdots$，星号(*)表示该项是前一项的共轭。将形式解代入(10)和(11)式，可得特征值C的表示式为

$$c = \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{-2\beta(a^2 + F) + a^2 Z/ik \pm \sqrt{X + iY}}{2a^2(a^2 + 2F)} \tag{13}$$

式中 $a^2 = k^2 + l^2$,

$$Z = (a^2 + F)[r_1 + r_2(1 - m^*)] + Fm^* r_2$$

$$X = U_s^2 a^4(a^4 - 4F^2) + 4\beta^2 F^2 - [Z^2 - 4a^2(a^2 + 2F)(1 - m^*)r_1 r_2](a^2/k)^2$$

$$Y = 4\beta\{F^2[r_1 + r_2(1 - m^*)] + (a^2 + F)Fm^* r_2\}(a^2/k)$$
$$- 2a^2(a^2 + 2F)U_s\{(a^2 - F)[r_1 - r_2(1 - m^*) + Fm^* r_2\}(a^2/k)$$

由于(13)式是线性模式特征方程的两个根，因而根据不同的参数，例如a，β，r_1，r_2和m^*等，可以分析它们对线性斜压不稳定的不同影响。对于无摩擦情况($r_1 = r_2 = 0$)，Pedlosky[4]已作了讨论，这里不再重复。

对于有摩擦情况，即摩擦系数r_1和r_2不同时为零，于是，在(13)式中令其虚部为零，可得到临界切变方程为

$$\widetilde{A} U_c^{*2} + \widetilde{B} U_c^* + \widetilde{G} = 0 \tag{14}$$

其中

$$\begin{cases} A^{*2} = a^2/F, \quad l^{*2} = l^2/F, \quad U_c^* = U_c F \\ \widetilde{Z} = (A^{*2} + 1)[r_1 + r_2(1 - m^*)] + m^* r_2 \\ \widetilde{A} = \widetilde{Z}^2 A^{*4}(4 - A^{*4}) + A^{*4}(A^{*2} + 2)^2\{(A^{*2} - 1)[r_1 - r_2(1 - m^*)] + m^* r_2\}^2 \\ \widetilde{B} = -4\beta A^{*2}(A^{*2} + 2)\{[r_1 + r_2(1 - m^*)] + (A^{*2} + 1)m^* r_2\} \\ \qquad \times\{(A^{*2} - 1)[r_1 - r_2(1 - m^*)] + m_* r_2\} \\ \widetilde{G} = -4\widetilde{Z}^2\{\beta^2 + A^{*6}(A^{*2} + 2)(1 - m^*)r_1 r_2 F/(A^{*2} - l^{*2})\} \\ \qquad + 4\beta^2\{[r_1 + r_2(1 - m^*)] + (A^{*2} + 1)m^* r_2\}^2 \end{cases} \tag{15}$$

並且，由(13)式可知，当

$$\left| \frac{a^2}{k}\widetilde{Z} \right| \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \left| I_m \sqrt{X + iY} \right| \text{ 时,}$$

或者相应地

$$\widetilde{A}U_s^{*2}+\widetilde{B}U_s^{*}+\widetilde{G}\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}0\quad\begin{matrix}\text{不稳定}\\\text{中性}\\\text{稳定}\end{matrix}\tag{16}$$

对于(14)式，一般情况下具有两个根即U_{C+}^{*}和U_{C-}^{*}。对于远小于$|U_C|$的微正量Δ，$(U_{C+}^{*}+\Delta)$或$(U_{C-}^{*}-\Delta)$均为不稳定，而$(U_{C+}^{*}-\Delta)$或$(U_{C-}^{*}+\Delta)$均为稳定。当$\widetilde{A}=0$时，(14)式仅有单根；$\widetilde{G}=0$时，二根中有一个为零根。

下面对β效应、摩擦作用和对流加热作用的不同情形分别进行讨论。並且在计算中取$F=14$，$\beta=3.508$，$l^*=\pi/\sqrt{F}$，加热强度暂考虑为$0\leqslant m^*\leqslant 1$，对于$m^*>1$的情况将在第五节中讨论。在实际大气中，$m^*=1$的加热强度大致相当于每天加热1℃左右。

三、有摩擦无β效应情况

文献[4]中已指出无摩擦和无β效应时，仅有临界的Froude数，而不存在临界的垂直切变。然而在有摩擦而无β效应时的情况並不这么简单。从(15)式可知，β为零时，系数$\widetilde{B}$为零，故(14)式化为

$$\widetilde{A}U_C^{*2}+\widetilde{G}=0\tag{17}$$

当系数$\widetilde{A}$和$\widetilde{G}$不为零时，上式有非零根U_C^{*}，並且其正负临界切变曲线即U_C^{*}—A^{*2}曲线相对于波数轴具有对称性。

(1)无加热(即$m^*=0$)

考虑到(15)式，由(17)式可得

$$U_C^{*2}=\frac{4A^{*2}(A^{*2}+1)^2r_1r_2F/(A^{*2}-l^{*2})}{(A^{*2}+1)^2(2-A^{*2})+(A^{*2}+2)(A^{*2}-1)^2(r_1-r_2)^2/(r_1+r_2)^2}\tag{18}$$

特别是当$r_1=r_2\equiv r$时，上式变为

$$U_C^{*2}=4A^{*2}Fr^2/(A^{*2}-l^{*2})(2-A^{*2})$$

此式与Pedlosky[4]的结果是一致的，摩擦作用显然是增稳的，並且临界曲线除掉$A^{*2}=l^{*2}$处为长波截断外，尚存在$A^{*2}=2$的短波截断。因此，在这两个波数以外更长或更短的波，均是绝对稳定波。

当$r_1\neq r_2$且都不为零时，由(18)式可知，短波截断不是出现在波数为$A^{*2}=2$处，而是在

$$A_\delta^{*2}=\sqrt[3]{\frac{1+\delta}{1-\delta}+\sqrt{\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^2-1}}+\sqrt[3]{\frac{1+\delta}{1-\delta}-\sqrt{\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^2-1}}>2$$

式中 $\delta=(r_1-r_2)^2/(r_1+r_2)^2$。当 δ 的值越大时，短波截断越大。

假如 $r_1=0$，但 $r_2\neq 0$，那么由(14)式知，这时不存在临界切变，而仅有临界 Froud 数，它与下层摩擦系数 r_2 无关，且满足

$$\frac{2-A^{*2}}{2+A^{*2}}=-\left[\frac{A^{*2}-1}{A^{*2}+1}\right]^2 \tag{19}$$

由(15)式所示 A^{*2} 的定义可知，这与 Pedlosky[5] 所得的结果也是一致的。

(2)考虑加热(即 $m^*\neq 0$)

对流凝结加热是通过下边界 Ekman 层的抽吸作用而引起的。仅在下边界有摩擦时才会有这种加热作用。当出现这种加热时，由(17)可得

$$U_c^{*2}=\frac{4A^{*2}\widetilde{Z}^2(1-m^*)r_1r_2F/(A^{*2}-1^{*2})}{\widetilde{Z}^2(2-A^{*2})+(2+A^{*2})\{(A^{*2}-1)[r_1-r_2(1-m^*)]+m^*r_2\}^2} \tag{20}$$

这里 r_1 和 r_2 都不为零。显然当加热作用 m^* 趋于 1 时，同样不存在临界切变，而仅存在临界的 Froude 数 F_C 且满足

$$\frac{2-A^{*2}}{2+A^{*2}}=-\left[\frac{(A^{*2}-1)r_1+r_2}{(A^{*2}+1)r_1+r_2}\right]^2 \tag{21}$$

显然与上下层摩擦系数 r_1 和 r_2 有关。对于 $m^*<1$ 的条件，从(20)式可知短波截断在大于 2 的波数 A^{*2} 处。对于适当的摩擦和加热，(20)式分母恒不为零，那么，这时不存在短波截波，见图 2 中的曲线Ⅳ。这表明对流加热越强，不稳定区就越向短波方向扩展。

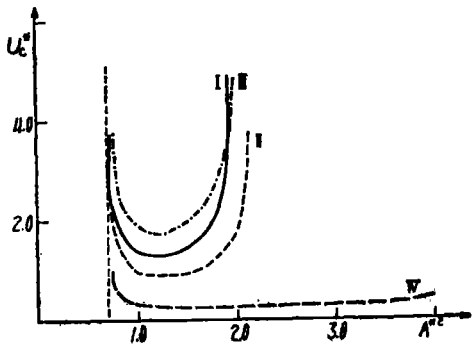

图 2 $\beta=0$. Ⅰ: $r_1=r_2=0.1$, $m^*=0.1$;
Ⅱ: $r_1=r_2=0.1$, $m^*=0.5$;
Ⅲ: $r_1=r_2=0.2$, $m^*=0.1$;
Ⅳ: $r_1=r_2=0.2$, $m^*=0.92$

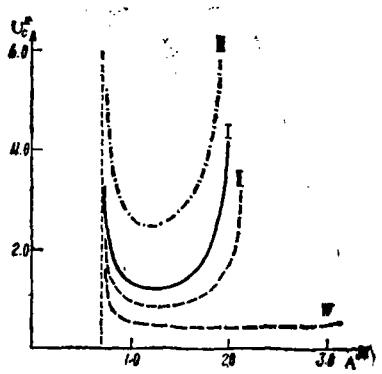

图3 $\beta=0$. Ⅰ: $r_1=0.1, r_2=0.11, m^*=0.1$;
Ⅱ: $r_1=0.1, r_2=0.11, m^*=0.5$;
Ⅲ: $r_1=0.1, r_2=0.2$, $m^*=0.1$;
Ⅳ: $r_1=0.1$, $r_2=0.2$, $m^*=0.92$

图 2 中自然反映了摩擦的增稳作用。图 3 也给出了四条曲线，其中上下层摩擦系数是不相等的，同样可看出和 $r_1=r_2$ 时有类同的结论。

四、有摩擦和β效应的情况

无加热作用时，β效应和摩擦作用分别是增稳的。但它们的共同作用並不是一定增稳的。尤其当 r_1 等于 r_2 时，它们的共同作用从下式可明显地表达出来。因为 $r_1 = r_2 \equiv r$ 时，(14)式可化为

$$U_C^{*2} = \frac{4\beta^2}{A^{*4}(4-A^{*4})} + \frac{4A^{*2}Fr^2}{(A^{*2}-1^{*2})(2-A^{*2})} + \frac{-4\beta^2}{A^{*4}(A^{*2}+1)^2(4-A^{*4})} \quad (22)$$

因此，长波和短波截断分别出现在 A^{*2} 为 1^{*2} 和 2 处，这与单纯摩擦时是一样的。一般情况下，β效应和摩擦的共同作用比单纯摩擦时的稳定性要大，这说明β效应总是增稳的。但是，对较小的 r，两者的共同作用都要比单纯β效应时的稳定性反而小，这是一个有趣的结果。而对较大的 r，两者的共同作用还是使稳定性增加。

前已指出无β效应时，正负临界切变相对于波数轴具有对称性。从(22)式可知，尽管存在β效应，只要上下层有相等的摩擦系数，且没有加热作用，临界曲线还是具有这种对称性。所以β效应必须与某些作用相结合才会改变这对称性。

(1)无加热(即 $m^* = 0$)

当 $r_1 \neq r_2$ 时，方程(14)中的系数 $\widetilde{B}$ 不再为零，从而存在 U_C^* 的一次项。因此，β效应与不同的上下层摩擦作用将使正负临界切变曲线不再具有对称性，见图 4。图中曲线的不对称性使绝对值相同的正切变比负切变更易不稳定。

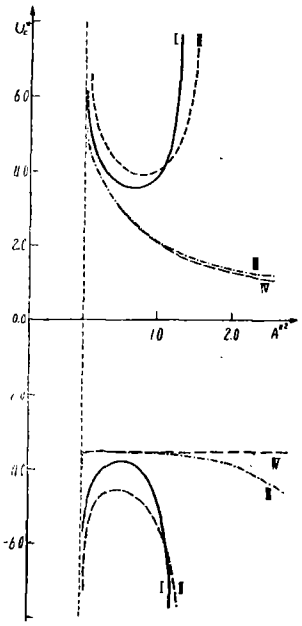

图 4 $\beta=3.508$ $m^*=0$.
Ⅰ: $r_1=0.1$, $r_2=0.2$;
Ⅱ: $r_1=0.1$, $r_2=0.5$;
Ⅲ: $r_1=0.001$, $r_2=0.1$;
Ⅳ: $r_1=0$, $r_2=0.1$

(2)考虑加热(即 $m^* \neq 0$)

β效应和加热的共同作用也会改变正负临界切变曲线的对称性。对 $r_1 = r_2$ 时，如图 5 所示。特别要指出的是图中的曲线Ⅱ，其正临界切变 U_{C+}^* 曲线随着波数 A^{*2} 的增加，在波数 A_δ^{*2}(这里 A_δ^{*2} 是系数 $\widetilde{A}$ 为零的根)处截断，这种截断称为中波截断，並且以后在下半平面上分支出一支曲线，这支曲线在波数 A_α^{*2}(A_α^{*2} 是短波截断，它是 $\sqrt{\widetilde{\beta}-4\widetilde{A}\widetilde{G}}$ 为零的根)处与 U_C^* 曲线汇合，並且两支曲线在这里截断。不稳定区域在上半平面是在 U_{C+}^* 曲线之上，而下半平面是在 U_{C-}^* 曲线和分支出来的 U_{C+}^* 曲线所围的以下区域。这种分支现象，曲线Ⅰ也有，另外在图 4 中也存

在，因为它们的分支现象不太明显，故均未绘出。

当加热作用 m^* 趋于 1 时，短波截断消失，这时由(14)式可得

$$U^*_{c+}=\beta \qquad U^*_{c-}=0 \tag{23}$$

正负临界切变曲线都成为与波数轴平行的直线，且与摩擦作用无关，所有波长的波对正切变都为条件稳定波，而在负的垂直切变气流中总是不稳定的。图 5 中的曲线Ⅲ就是此类情况的临界曲线。

再考虑上下层摩擦不同时的加热作用。显然正负临界切变曲线具有非对称性，如图 6 所示，並且跟图 5 的基本特征类似。重要的差别在于对较强的加热，U^*_{c-}曲线可出现在上半平面。这表明对负切变或弱正切变总是不稳定的，适当强的正切变也是不稳定的。稳定区域仅在U^*_{c+}曲线和U^*_{c-}曲线之间。

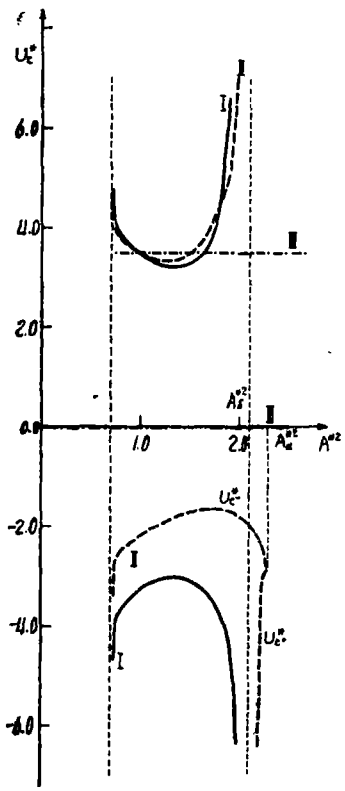

图 5 $\beta=3.508$ $r_1=r_2=0.01$.
Ⅰ: $m^*=0.1$;
Ⅱ: $m^*=0.5$;
Ⅲ: $m^*=1.0$

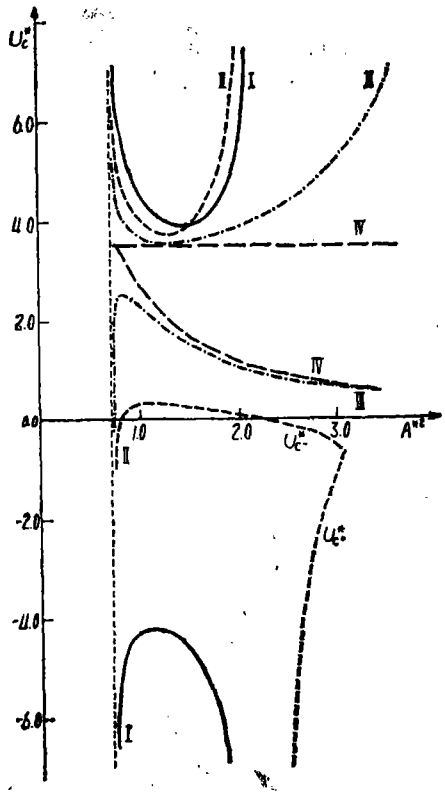

图 6 $\beta=3.508$, $r_1=0.1$, $r_2=0.5$.
Ⅰ: $m^*=0.1$; Ⅱ $m^*=0.7$;
Ⅲ: $m^*=0.92$; Ⅳ: $m^*=1.0$

现在讨论一种特殊的情形，当 $r_1=0$，以及 $r_2\neq 0$时，则从(15)式可知，这时存在的临界切变与下层的摩擦系数 r_2 无关，並且考虑加热作用后仍不改变这种性质。当然

加热对U_C^*有其它的影响。在没有加热时，由(14)可得

$$U_{C+}^* = \beta / A^{*2} \qquad U_{C-}^* = \beta \tag{24}$$

该曲线见图 4 中的曲线Ⅳ。

当 $m^* \neq 0$ 时，如图 7 所示，正临界切变曲线影响並不大，而负临界切变曲线影响很明显，当负临界切变U_{C-}^*曲线截断后，在上半平面上分支出一支曲线来，然后与U_{C+}^*曲线汇合並截断。上半平面的不稳定区域为这两条曲线所围的区域。尤其是加热程度达得 $m^* = 1$ 时，由(14)式得

$$\begin{cases} U_{C+}^* = \beta / A^{*2}, \ U_{C-}^* = \beta \quad 对 A^{*2} \leqslant 1 \\ U_{C+}^* = \beta, \ U_{C-}^* = \beta / A^{*2} \quad 对 A^{*2} > 1 \end{cases} \tag{25}$$

相应的曲线为图 8 中的Ⅰ和Ⅱ。稳定区域是这两条曲线所夹的区域。

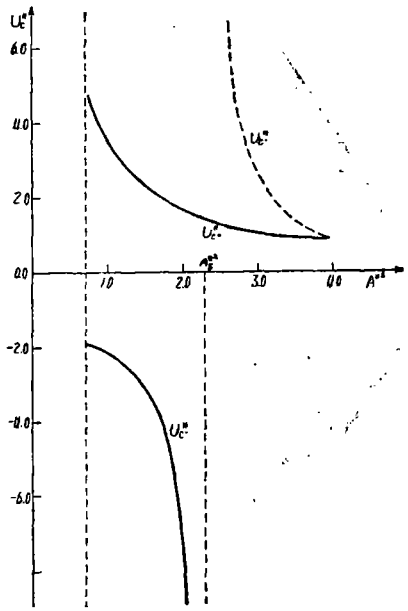

图 7 $\beta=3.508$, $r_1=0$, $r_2=0.1$, $m^*=0.25$

五、关于$m^* > 1$的情况

前已讨论了加热(m^*)对斜压不稳定的影响，当$m^* \to 1$时，相应的临界切变(U_C^*)曲线短波截断的波数趋于无穷，长波截断不存在。如加热到$m^* > 1$时，则更利于斜压不稳定。首先由基本方程(10)和(11)知，$m^* > 1$时，在低层，即(11)式中，摩擦(r_2)项将被加热(m^*)项抵销而成为“负摩擦”。在高层，即(10)式中，该两项之比为

$$r_1 \nabla^2 \phi_1 / m^* r_2 \nabla^2 \phi_2 = r_1 A_1 / m^* r_2 A_2 \tag{26}$$

跟上下层振幅之比A_1/A_2有关。如将波动解(12)式分别代入(10)和(11)式，可得

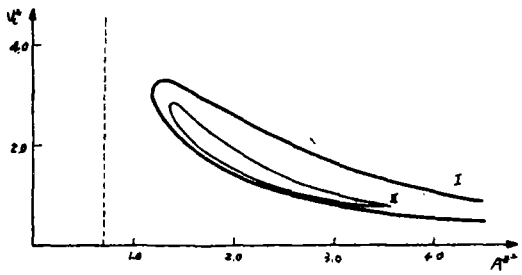

图 8 $\beta=3.508$, $r_1=0.1$, $r_2=0.5$.
Ⅰ: $m^*=1.2$; Ⅱ: $m^*=1.4$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a^2 + F}{F} + \frac{\beta - FU_s + ir_2(1 - m^*)a^2/k}{F(c - U_2)} \tag{27}$$

因此在高层，即(10)式中，当 A_1和A_2取适当的模和位相差，亦可出现“负摩擦”的情况，于是对于任意的切变U_S^*几乎总是斜压不稳定的。图8就是$m^*>1$时，由(14)式计算得到的临界切变曲线，该曲线所圈的区域为稳定区，显然(m^*-1)愈大，稳定区愈小。

六、结　论

利用线性斜压模式中的临界切变曲线即$U_C^*-A^{*2}$曲线，分析讨论了摩擦(r)，β效应和对流凝结加热(m^*)对斜压不稳定的影响，其主要结论可归纳如下。

1.临界曲线的不对称性，反映了绝对值相等的正负切变其稳定性情况可以不同。而不对称性的出现，主要决定于$\beta\neq0$，因为$\beta=0$时临界曲线都是对称的。但是，$\beta\neq0$时还须配以$r_1\neq r_2$或$m^*\neq0$的条件，才会出现不对称性。否则，在$\beta\neq0$，$r_1=r_2$和$m^*=0$的情况下，临界曲线仍然是对称的。

2.临界曲线的长波截断，反映超过适当波长的长波总是斜压稳定的。除掉$\beta\neq0$时$r_1=0$或$m^*=1$无长波截断外，本模式在$m^*<1$时均具有$A^{*2}=1^{*2}$的长波截断。

3.临界曲线的短波截断，表明短于适当波长的短波也是斜压稳定的。但是，短波截断的波数随着加热强度的增强($m^*\to1$)而无限增加。因此，对流加热愈强，对更短的短波愈有利于斜压不稳定。当$\beta\neq0$且$r_1\neq r_2$或$m^*\neq0$时，不但可出现短波截断，而且存在中波截断。

4.摩擦(r)和β各自分别起着斜压增稳作用。但是，弱摩擦(即小r)和β效应相结合，其斜压稳定性反而比单纯β效应作用还要小。当有对流加热产生时，且$m^*>1$，摩擦的作用总是减稳的。

5.对流加热(m^*)起着斜压不稳定性增长的作用。並且，较强的加热($m^*\to1$)可使短波截断波数趋于无穷。当$m^*\geqslant1$时，长波截断消失，且在r_1和r_2都不为零时，U_{C-}^*曲线和U_{C-}^*曲线构成了一条封闭的曲线。稳定区域很小，当加热达到一定程度时就没有稳定的区域。

关于线性斜压不稳定的这些结论，有许多是值得联系实际大气环流演变和槽脊的发展衰减，作进一步分析讨论的。此外，本模式亦可用于讨论非线性问题。对于这方面的进一步工作，将另文讨论。

参 考 文 献

[1] Jaw, J.J.(赵九章), The formation of semipermanent centers of action in relation to the horizontal solenoid field, J.Met.3, 103—114, 1946.

[2] Charney, J.G., The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current, J. Meteor.4, 135—163, 1947.

[3] Eady, E.T., Long waves and cyclone waves, Tellus 1, 33—52, 1949

[4] Pedlosky, J., Finite-amplitude baroclinic waves, J.Atmos.Sci., 27, 15—30, 1970.

[5] Pedlosky, J., The growth and decay of finit-amplitude baroclinic waves, J.Atmos. Sci., 40, 1863—1876, 1983.

[6] Chang, C.P., On the stability of low-latitude quasi-geostrophic flow in conditionally unstable atmosphere, J.Atmos.Sci., 28, 270—274, 1971.
[7] 李崇银，大气长波的混合型不稳定，科学探索，第2期，1982.

ROLE OF FRICTION AND HEATING FROM CONVECTIVE CONDENSATION IN BAROCLINIC INSTABILITY-A LINEAR THEORY

Yu Zhihao Zheng weizhong*

ABSTRACT

Using a two-layer model, Pedlosky had studied baroclinic instability of zonal flow on a frictionless β-plane and on a f-plane with friction respectively. On the basis of his findings, baroclinic instability on a β-plane with friction and with heating from convective condensation is investigated, yielding linear results. A nonlinear theory will be discussed in a separate paper.

The curves of critical shear $\left(U_c^*\right)$ -wave number (A^{*2}) are used to analyze the linear baroclinic instability influenced by β-effect, friction and heating from convection. It is shown that not only the β-effect alone could contribute to increasing stability but its combination with friction and heating from convection can also make the curves of critical stability asymmetrical. This implies that the positive and negative shears of equal absolute values may differ in stability. Friction (r) may serve as a stabilizing factor, but the β-effect with a weak friction is less stable than that without friction. Heating from convection (m^*) always increases the baroclinic instability and makes friction a destabilizing factor when $m^*>1$. Under the condition of $m^*<1$ and that dissipation exists in layers both above and below, the long-wave cutoff for $A^{*2}=L^{*2}$ appears in this model. And wave number of the short-wave cutoff increases infinitely as intensification of heat $(m^*\to 1)$ continues. In addition, medium-wave cutoffs also exist in the critical curves.

*Affiliated with the Department of Meteorology, Nanjing University