

对 $\mu_A \boxtimes \mu_B$ 是凸模糊度的证明

许 盘 清

提 要

本文直接从定义出发证明: 若 μ_A 和 μ_B 是凸模糊度, 则 $\mu_A \boxtimes \mu_B$ 也是凸模糊度。方法是先把 μ_A 和 μ_B 分成几种情况, 然后逐一加以证明, 这样可得出 $\mu_A \boxtimes \mu_B$ 在一般情况下是凸模糊度的结论。

一、前 言

1976年水本雅晴(Mizumoto)和田中幸吉(Tanaka)两位教授曾提出如下问题^[1]:

若 μ_A 和 μ_B 是2型Fuzzy集的凸模糊度, 那么 $\mu_A \boxtimes \mu_B$ 是否仍为凸模糊度? 对此本文得到了肯定的结果。

定理: 2型Fuzzy集的两个凸模糊度的并 $\mu_A \boxtimes \mu_B$ 是凸模糊度。

二、定义和引理

定义1: 论域 X 中的2型Fuzzy集 A 的隶属函数 $\mu_A(x)$ 是映射

$$X \rightarrow [0, 1]^J \quad J \subseteq [0, 1]$$

$\mu_A(x)$ 的“值”为 J 上的一个Fuzzy集, 称2型Fuzzy集的模糊度。

又记成:

$$\mu_A(x) = \sum_i f_x(u_i)/u_i \quad u_i \in J, f_x(u_i) \in [0, 1], x \in X$$

对某确定的 x , “值” $\mu_A(x)$ 又记成 μ_A , 或直接记成 $f(u)$ 。

定义2: 模糊度的并^[1]

$$\begin{aligned} \mu_A \boxtimes \mu_B &= \left(\sum_i f(u_i)/u_i \right) \boxtimes \left(\sum_j g(w_j)/w_j \right) \\ &= \sum_{i,j} f(u_i)g(w_j)/u_i \vee w_j \end{aligned}$$

$$u_i, w_j \in J; \quad f(u_i), g(w_j) \in [0, 1]$$

定义3: μ_A 称凸模糊度, 如果它是 J 中凸Fuzzy集的隶属函数^[2]。

具体地说, 对 J 中任意三个值, 若有关系 $u_i \leq u_k \leq u_j$, 则

$$f(u_k) \geq \min \{f(u_i), f(u_j)\}$$

为了论证简便（在不引起误解的情况下），以下对记号的使用较为自由。

引理：若 μ_A 和 μ_B 为凸模糊度，它们的隶属函数分别为 $f(u)$, $g(w)$ 。又 $g(w_q) = \sup_i \{g(w_i)\}$, $w_i < w_j$ 如果 $i < j$ 。

$$\mu_A \boxtimes \mu_B = \sum_{a_j \in I} \varphi(a_j) / a_j$$

则有

i) 当 $j \leq q$ 时, $g(w_i)$ 为单调不减函数:

$$g(w_i) \geq g(w_{i-1}) \geq \dots$$

当 $i \geq q$ 时, $g(w_i)$ 为单调不增函数:

$$g(w_i) \geq g(w_{i+1}) \geq \dots$$

$$ii) \quad \varphi(a_j) = g(a_j) \sum_{u \leq a_j} f(u) \quad j \leq q$$

证明: i) $w_{i-1} < w_i \leq w_q$

$$\min \{g(w_{i-1}), g(w_q)\} = g(w_{i-1})$$

又由于 $g(w)$ 的凸性, 所以

$$g(w_i) \geq \min \{g(w_{i-1}), g(w_q)\} = g(w_{i-1})$$

类似地, 在区间 $w_{i-2} < w_{i-1} < w_q$ 上可推出

$$g(w_{i-1}) \geq g(w_{i-2})$$

类似地可以证明 $i \geq q$ 的情况。

ii) 由定义 2 得出

$$\begin{aligned} \varphi(a_j) &= g(a_j) \sum_{u \leq a_j} f(u) + f(a_j) \sum_{w \leq a_j} g(w) \\ &= g(a_j) \sum_{u \leq a_j} f(u) + f(a_j) g(a_j) \\ &= g(a_j) \sum_{u \leq a_j} f(u) \quad \text{证毕} \end{aligned}$$

类似地, 如果 $f(u_p) = \sup_i \{f(u_i)\}$, 当 $j \leq p$ 时, 有

$$\varphi(a_j) = f(a_j) \sum_{w \leq a_j} g(w)$$

三、定理的证明

现在证明文首提出的定理。

令 $i < k < j$, 即 $a_i < a_k < a_j$ 。我们将在不同情况下证明不等式,

$$\varphi(a_k) \geq \min \{ \varphi(a_i), \varphi(a_j) \}$$

条件 1: $\min \{ f(u_i), f(u_j) \} = f(u_i)$

$$\min \{ g(w_i), g(w_j) \} = g(w_i)$$

由条件 1, 有不等式:

$$\begin{aligned} \varphi(a_k) &= f(a_k) \sum_{w \leq a_k} g(w) + g(a_k) \sum_{u \leq a_k} f(u) \\ &\geq f(a_i) \sum_{w \leq a_i} g(w) + g(a_i) \sum_{u \leq a_i} f(u) = \varphi(a_i) \end{aligned}$$

即 $\varphi(a_k) \geq \varphi(a_i)$

条件 2: $\min \{ f(u_i), f(u_j) \} = f(u_i)$

$$\min \{ g(w_i), g(w_j) \} = g(w_i)$$

$$\text{设 } g(w_q) = \sup_i \{ g(w_i) \} \quad f(u_p) = \sup_i \{ f(u_i) \}$$

再分细目讨论如下。

1° 设 $k \leq q$

由于 $i < k$ 以及引理 i)

$$g(a_i) \sum_{u \leq a_i} f(u) \leq g(a_k) \sum_{u \leq a_k} f(u)$$

由条件 2 有

$$f(a_i) \sum_{w \leq a_i} g(w) \leq f(a_k) \sum_{w \leq a_k} g(w)$$

两式相加得

$$\varphi(a_i) \leq \varphi(a_k)$$

2° 设 $q < k$

(A) 当 $p \leq k$ 时, 由引理 i) 有

$$f(a_k) \geq f(a_j)$$

若 $s \geq k$, 则 $f(a_s), g(a_s)$ 均为不增函数, 所以有

$$f(a_k) \sum_{w \leq a_k} g(w) \geq f(a_j) \sum_{w \leq a_j} g(w)$$

再由条件 2 有

$$g(a_k) \sum_{u \leq a_k} f(u) \geq g(a_i) \sum_{u \leq a_i} f(u)$$

以上两式相加得

$$\varphi(a_k) \geq \varphi(a_i)$$

(B) 当 $p > k$ 时, 由引理及条件 2 有

$$f(a_k) \geq f(a_i)$$

$$\varphi(a_k) = f(a_k) \sum_{w \leq a_k} g(w)$$

$$\varphi(a_i) = f(a_i) \sum_{w \leq a_i} g(w)$$

$$\varphi(a_k) \geq \varphi(a_i)$$

条件 3: $\min \{f(u_i), f(u_j)\} = f(u_i)$

$$\min \{g(w_i), g(w_j)\} = g(w_i)$$

1° $k \leq q$, 或者 $k \leq p$

上两个不等式只要其中一个成立, 便可利用引理及条件 3 (同条件 2 中 2° (B) 一样) 得到

$$\varphi(a_k) \geq \varphi(a_i)$$

2° $q < k$, $p < k$.

由引理 i) 知, 若 $s > q$, 或 $s' > p$, $g(a_s)$ 、 $f(a_{s'})$ 为单调不增函数, 因而有

$$f(a_k) \sum_{w \leq a_k} g(w) \geq f(a_i) \sum_{w \leq a_i} g(w)$$

$$g(a_k) \sum_{u \leq a_k} f(u) \geq g(a_i) \sum_{u \leq a_i} f(u)$$

两式相加, 得

$$\varphi(a_k) \geq \varphi(a_i)$$

以上察尽了各种情况, 不等式

$$\varphi(a_k) \geq \min \{ \varphi(a_i), \varphi(a_j) \}$$

得证。

$\varphi(a)$ 为 $\mu_A \boxtimes \mu_B$ 的隶属函数, 又以上不等式恰为凸性的定义。

本文写成后, 承蒙耿春仁同志审阅, 提出宝贵意见, 刘桂复老师审改定稿, 作者对此, 深表感谢。

参 考 文 献

- [1] M. Mizumoto and K. Tanaka, Some Properties of Fuzzy Sets of Type 2, Information and Control, Vol. 31, No. 4, pp. 312—340, 1976.
- [2] J. G. Brown, A Note on Fuzzy Sets, Information and Control, Vol. 18, No. 1, pp. 38—39, 1971.

A Proof of $\mu_A \boxtimes \mu_B$ in the Form of a Convex Fuzzy Grade

Xu Panqing

ABSTRACT

It is proved directly from the definition that $\mu_A \boxtimes \mu_B$ has a convex fuzzy grade on the assumption that each of them is of such grade. By examining them in various cases and giving a proof for each case an expression is proposed for the convexity of $\mu_A \boxtimes \mu_B$, which is appropriate to the general case.