

王蕊,王盘兴,吴洪宝,等.小波功率谱 Monte Carlo 显著性检验的一个简易方案[J].南京气象学院学报,2009,32(1):140-144.

小波功率谱 Monte Carlo 显著性检验的一个简易方案

王蕊,王盘兴,吴洪宝,李丽平,陈延聪,刘晴晴
(南京信息工程大学 大气科学学院,江苏 南京 210044)

摘要: 对一个气象量时间序列 $p = \{P(t), t = 1, n\}$, 通过相空间中的几何分析直观地阐明了 Morlet 小波功率谱 $W(t, k)$ 的计算原理, 给出了一个对 $W(t, k)$ 作 Monte Carlo 显著性检验的方案。由于该方案中随机序列的产生与分析序列 p 的理论分布无关, 实施简单易行。对 6 月 100 hPa 南亚高压强度指数序列的小波功率谱显著性检验表明, 该方案能充分揭示 p 中年际、年代际振荡随时间的变化, 因而具有实际应用价值。

关键词: 气象序列; 小波功率谱; 显著性检验

中图分类号: P434 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-2022(2009)01-0140-05

A Simple Scheme of Monte Carlo Significance Test for Wavelet Power Spectrum

WANG Rui, WANG Pan-xing, WU Hong-bao,

LI Li-ping, CHEN Yan-cong, LIU Qing-qing

(School of Atmospheric Sciences, NUIST, Nanjing 210044, China)

Abstract: The computational principle of the Morlet wavelet power spectrum $W(t, k)$ of a meteorological time-series $p = \{P(t), t = 1, n\}$ is intuitively illuminated using the geometric analysis in phase space, and a scheme of Monte Carlo significance test for $W(t, k)$ is presented in this paper, that is convenient and simple because the generation of the random series is unrelated to the theoretical distribution of the analyzed series. Significance test is performed for wavelet power spectrum of the intensity index series of 100 hPa South Asia High in June, the results show that the scheme can sufficiently reveal the temporal evolution of interannual and interdecadal oscillations of p , thus it is of practical application value.

Key words: meteorological time-series; wavelet power spectrum; significance test

0 引言

小波分析方法是一种揭示时间序列(或空间分布)局域振荡特征的方法^[1-3], 其数学基础可参见文献[4]。在气象量时间序列(或场)中, 振荡特征随时(空)变化的现象普遍存在^[5-7]。以时间序列为例, 早在 20 世纪 50 年代杨鉴初^[8]即提出, 气象要素变化周期本身是时间的函数, 过去一度出现的周期随时间会发生变化, 或完全消失而代之以另一种新周期。显然, 分析气象量时间序列(或场)的局域振荡特征对于认识分析对象变化规律及预测均有重要

意义, 故小波分析方法在气象量分析中得到广泛应用^[9-12]。在气象量的小波分析中, Morlet 小波和墨西哥帽(Mexican hat)小波是常用的两种小波, 文献[1-2]对两种小波及其在气象量分析中的应用已有详细的介绍和总结。

作为一种统计分析方法, 小波分析所得统计量需作显著性检验, 小波分析的显著性检验一般对其功率谱进行。检验循两种思路, 一种思路是假设分析对象服从某种理论分布, 然后通过理论分析直接给出由它构成的随机序列小波功率谱在显著性水平 α 下的显著性标准; 另一种思路是用 Monte Carlo 方

收稿日期: 2007-12-14; 改回日期: 2008-04-21

基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(40633018)

作者简介: 王蕊(1983—), 女, 陕西宝鸡人, 硕士, 研究方向为大气环流异常、短期气候预测, wrui_cg1@hotmail.com.

法(随机试验)^[13]模拟分析对象的小波分析过程,用随机试验结果的样本分布给出置信概率 $1-\alpha$ 下的显著性检验标准。文献[14]研究了小波分析中两种思路的内在统一性。随机序列的生成又可采用不同方法,文献[15]采用原序列的不同频率成分随机初始位相迭加法产生试验序列,本文则采用原序列时序随机排列产生试验序列。空间小波分析及检验类似文献[16]。

本文提出一个用 Monte Carlo 方法对实气象量序列 Morlet 小波功率谱作显著性检验的简单易行的方法,以期对最常用的实气象量序列小波分析结果之一——小波功率谱的显著性作出统计判断。试验对文献[17]给出的6月南亚高压强度指数序列 $\{P(t), t=1, 60\}$ 进行。结果表明,由它给出的时间一周域上功率谱显著区域与分析对象相应时域上的振荡特征相符,表明该简易方法具有识别振荡强度随时间变化的能力。

1 Morlet 小波分析的功率谱

对长为 n 的实序列 $\{P(t), t=1, n\}$,求得其标准(中心)化序列

$$\bar{P}(t), t=1, n, \quad (1)$$

其总能量(或总方差)为

$$W = \sum_{t=1}^n \bar{P}^2(t) = n. \quad (2)$$

标准化不改变序列 $\{P(t), t=1, n\}$ 的振荡特征。为计算方便,类似于文献[18],将序列(1)向前、后各作了 n 年延拓,得

$$\bar{x}(t), t=-n+1, 2n. \quad (3)$$

为减小人为性对分析结果的影响,其向前($t=-n+1, 0$)、向后($t=n+1, 2n$)延拓的 n 年的 $\bar{x}(t)$ 均取为0,中间的 n 年($t=1, n$)的 $\bar{x}(t)$ 保留真值 $\bar{p}(t)$ 。

参照文献[2],在 $t' = -(n-2), n$ 上构造适于分析序列(3)的 Morlet 小波函数 ψ_k ,

$$\psi_k(t') = e^{i2\pi t'/T_k} e^{-t'^2/2} = e^{-t'^2/2} \cos(2\pi t'/T_k) + ie^{-t'^2/2} \sin(2\pi t'/T_k).$$

式中: $T_k = n/k$ 是一般谐波分析选用的周期,故 k 为 $t=1, n$ 上完整振荡个数, $k=1, [n/2]; [\cdot]$ 为取整算符。分别以 ψ_{c_k}, ψ_{s_k} 记 ψ_k 的实部、虚部,它们均是实变量函数; ψ_{c_k}, ψ_{s_k} 的标准化形式为 $\bar{\psi}_{c_k}, \bar{\psi}_{s_k}$,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{c_k}(t') &= \psi_{c_k}(t') / \|\psi_{c_k}\|, \\ \bar{\psi}_{s_k}(t') &= \psi_{s_k}(t') / \|\psi_{s_k}\|. \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $\|\cdot\|$ 为向量模的算符。

显然, $\bar{\psi}_{c_k}, \bar{\psi}_{s_k}$ 的模均是 $2n-1$ 维欧氏空间中的单位向量,图1给出了 $n=60$ 时部分周期的 $\bar{\psi}_{c_k}, \bar{\psi}_{s_k}$ 图像。

据此,可求得序列 $\bar{x}_t$ (它是以 t 为中心时刻、长为 $2n-1$ 的时间序列)

$$\bar{x}_t(t'), t' = t - (n-1), t + (n-1) \quad (6)$$

的标准化小波系数

$$\begin{aligned} A_c(t, k) &= (\bar{x}_t, \bar{\psi}_{c_k}), \\ A_s(t, k) &= (\bar{x}_t, \bar{\psi}_{s_k}), t = 1, n. \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $(\cdot, \cdot)$ 为向量内积算符。本文采用与文献[14-16]相同的小波功率谱的定义,即复小波系数的模方,它可与 Fourier 功率谱相比较。

因为 $\bar{\psi}_{c_k}, \bar{\psi}_{s_k}$ 正交,故在以 t 时刻为中心、长为 $2n-1$ 时域上周期 $T_k = n/k$ 的小波功率为

$$\begin{aligned} W(t, k) &= A_c^2(t, k) + A_s^2(t, k), \\ t &= 1, n, k = 1, [n/2] - 1. \end{aligned} \quad (8)$$

特别地,当 $k = [n/2]$ 时,

$$W(t, [n/2]) = \begin{cases} A_c^2(t, (n-1)/2) + A_s^2(t, (n-1)/2), n \text{ 为奇数}; \\ A_c^2(t, n/2), n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

$W(t, k)$ 是待检验的小波统计量之一。由(8)式知,对大部分 $T_k, W(t, k)$ 由 $\bar{\psi}_{c_k}, \bar{\psi}_{s_k}$ 两个小波的功率合成;而对 n 为偶数时的取样周期($T_{n/2}$),它仅由 $\bar{\psi}_{c_{n/2}}$ 一个小波的功率构成。因此,对随机序列, n 为偶数时, $W(t, n/2)$ 应为 $W(t, k < n/2)$ 的 $1/2$ 。

2 $W(t, k)$ 的 Monte Carlo 检验

2.1 原理

就 Morlet 小波功率谱 $W(t, k)$ 的检验而言,若从理论途径寻找其统计方法检验,需知 $W(t, k)$ 所服从的理论分布,根据它求得样本容量 n 和显著性水平 α 对应的 $W(t, k)$ 临界值 $W_{n, \alpha}(t, k)$ 。实践证明,这不容易严格做到^[14]。

按 Monte Carlo 方法思路,将分析对象随机序列 $\bar{x}_t$ 看作 E^{2n-1} 中的一个向量,则 $\bar{\psi}_{c_k}, \bar{\psi}_{s_k}$ 可视为该空间中两个相互正交的单位向量。因为 $\bar{x}(t)$ 只在 $t=1, n$ 上为非0值, $\bar{\psi}_{c_k}(t'), \bar{\psi}_{s_k}(t')$ 在 $|t'|$ 大于 e 折时间的时域上迅速趋于0,故 $\bar{x}_t$ 实际是上述 E^{2n-1} 中 E^n 子空间中的一个向量;而在以 $t=\tau(k), n-\tau(k)+1$ 为中心、长为 $2n-1$ 的 $\bar{x}_t$ 的小

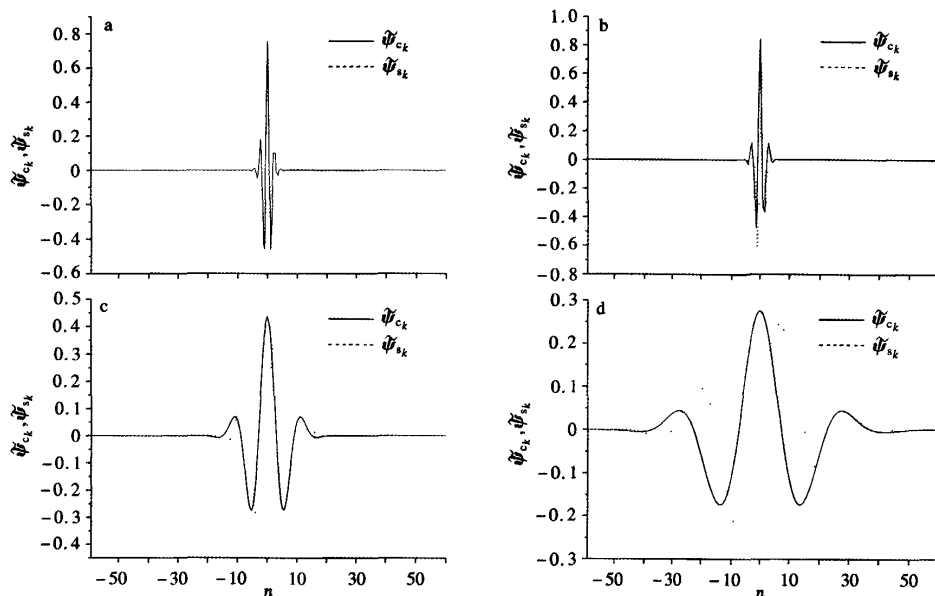


图 1 $n=60$ 的标准化 Morlet 小波 ψ_{c_k} (实线)、 ψ_{s_k} (虚线)

a. $T_3=2$; b. $T_3=3$; c. $T_3=12$; d. $T_2=30$

Fig. 1 Standardized Morlet wavelet ψ_{c_k} (solid line) and ψ_{s_k} (dashed line) with $n=60$

a. $T_3=2$; b. $T_3=3$; c. $T_3=12$; d. $T_2=30$

波分析中, ψ_{c_k} 、 ψ_{s_k} 也可近似地视为该 E^n 子空间中的单位正交向量。

当模拟 $\bar{x}_l$ 的向量 $\bar{x}_{l,l}, l=1, \overline{L}$ 随机地产生时, 据能量按自由度分配的原理, $\bar{x}_{l,l}$ 在 ψ_{c_k} 、 ψ_{s_k} 上的投影平方和

$$W_l(t, k) = (\bar{x}_{l,l}, \psi_{c_k})^2 + (\bar{x}_{l,l}, \psi_{s_k})^2 = A_{c_l}^2(t, k) + A_{s_l}^2(t, k) \quad (9)$$

的均值满足

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^L W_l(t, k) / L = \begin{cases} 2n/(n-1), & n \text{ 为奇数或 } n \text{ 为偶数但 } k \neq n/2; \\ n/(n-1), & n \text{ 为偶数且 } k = n/2. \end{cases}$$

(8) 式 $W(t, k)$ 的临界值 $W_{n,\alpha}(t, k)$ 可由 Monte Carlo 试验得到。

2.2 求 $W_{n,\alpha}(t, k)$ 的步骤

(1) 产生随机序列 $\bar{x}_l, l=1, \overline{L}$

在时域 $t=1, \overline{n}$ 上对序列 $\bar{x}$ 作随机排序, 得

$$\bar{x}_l, l=1, \overline{L}. \quad (11)$$

其操作方法是利用随机数产生程序^[19]产生 L 个长为 n 的时间序列:

$$\xi_l(t), t=1, \overline{n}, l=1, \overline{L}.$$

对每个 $\xi_l(t), t=1, \overline{n}$ 作非升序排列 (即排列后的 $\xi(t)$ 满足 $\xi(t) \geq \xi(t+1)$), 并带动 $\bar{x}(t), t=1, \overline{n}$ 变换时序, 由此得 $\bar{x}_l$; 重复 L 次得 (11) 式。由上述操作过程知, (11) 式中 $\bar{x}_l$ 的分布全同于分析对象 $\bar{x}$ 。

(2) 求 $\bar{x}_l, l=1, \overline{L}$ 的 Morlet 小波功率谱 $W(t, k)$

对 (11) 式中每个 $\bar{x}_l$ 作 Morlet 小波分析, 得

$$W_l(t, k), t=1, \overline{n}, k=1, \lfloor n/2 \rfloor, l=1, \overline{L}. \quad (12)$$

对 $t \sim T_k$ 剖面上一点的功率试验结果 $W_l(t, k)$ 作非升序排列, 得

$$W_{l'}(t, k), l'=1, \overline{L}. \quad (13)$$

对显著性水平 α , 取第 $l'_a = \alpha L$ 个功率值 $W_{l'_a}(t, k)$ 为 $W_{n,\alpha}(t, k)$, 它是检验 $W(t, k)$ 的临界值。在由 e 折时间 $\tau(k)$ 决定的有效时段 $t=\tau(k), n-\tau(k)+1$ 内, 当 $W(t, k) \geq W_{n,\alpha}(t, k)$ 时, 判断以 t 为中心时刻、周期为 T_k 的振荡显著; 反之则不显著。

3 实例

对 (1) 式给出的 6 月 1948—2007 年 (60 a) 100 hPa 标准化南亚高压强度指数 $P(t) (t=1, \overline{60})$, 图 2a 给出了它们的标准化序列 $\bar{p}$, 其总功率 $\|\bar{p}\|^2$

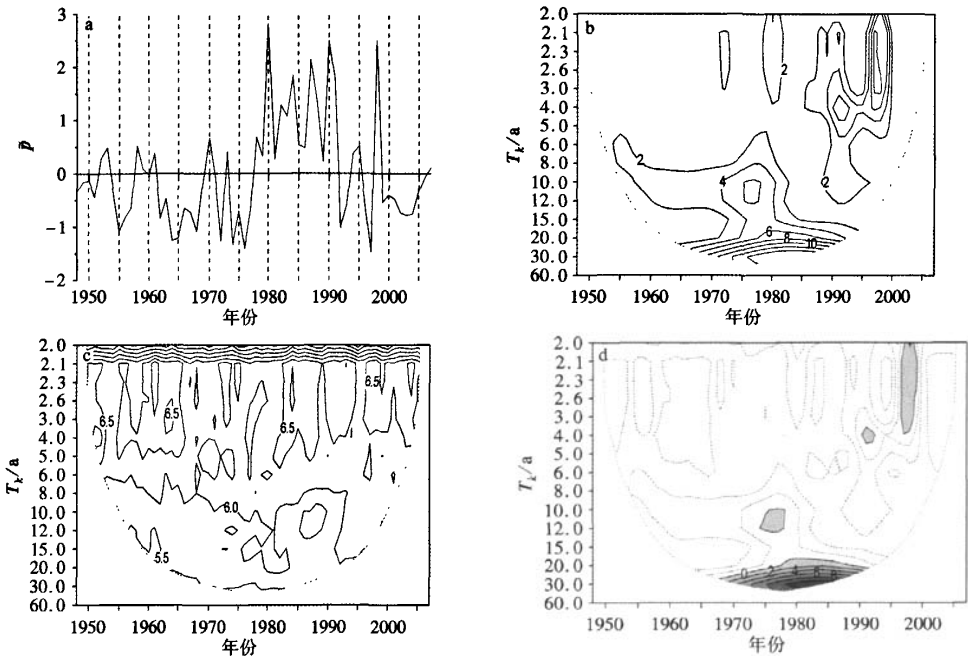


图 2 1948—2007 年 6 月南亚高压强度指数 P

a. 时间变化曲线;b. 小波功率谱 W ;c. Monte Carlo 检验临界值 $W_{0.05}$;d. $\Delta W = W - W_{0.05}$

(图 d 中的阴影区为 $\alpha = 0.05$ 的显著性水平检验区)

Fig. 2 Intensity index P of South Asia High in June from 1948 to 2007

a. time series;b. wavelet power spectrum W ;c. critical value $W_{0.05}$ for Monte Carlo test;
d. $\Delta W = W - W_{0.05}$ (The shaded areas are significant regions at confidence level $\alpha = 0.05$)

均为 $W = 60$ 。图 2b 给出了 $\bar{p}$ 的小波功率谱 $W(t,k)$;图 2c 是试验总次数 $L = 1\,000$ 时 Monte Carlo 试验提供的 $W_{60,0.05}(t,k)$,是 $I'_{\alpha} = 50$ 时的 $W_{I'}(t,k)$ 值;图 2d 是差值 $W(t,k) - W_{\alpha}(t,k)$ 。图 2b-2d 虚线以外的区域是考虑了头尾效应而略去的部分^[12]。

由图 2d 知,南亚高压强度在 20 世纪 70 年代、80 年代为中心的时段,6 月 20 ~ 30 a 周期是显著的,70 年代中后期出现孤立的 10 ~ 12 a 显著周期。因此,6 月南亚高压强度在 70 年代、80 年代前后存在显著的年代际变化。此外,6 月 $\bar{p}$ 在 90 年代出现显著的 2 ~ 4 a 周期振荡。这些检验结果均与 $\bar{p}$ 曲线(图 2a)上对应时域周期的大振幅振荡相一致。

图 2c 给出的 $W_{\alpha}(t,k)$ 大部分区域为 6 上下,只有取样周期($\Delta T = 2$ a)上明显地小,这是由于本文例子的 $T_{30} = 2$ a 仅由一个小波($\psi_{c_{30}}$)的功率构成。图 3 上的虚线给出 $W_{0.05}(t,30)$ 约为 4。在 2 a 周期上,只有 1998 年前后 6 月 $\bar{p}$ 的功率谱是显著的,由图 2a 可知,1998 年前后的 2 a 周期振荡确有很大的

振幅。

文献[14]指出,对复小波分析,正态随机序列小波功率谱检验的理论临界值 $W_{\alpha}(t,k)$ 非常近于 3.0。由前文分析可知,本文所得 $W_{0.05}(t,k)$ 与单个实小波的平均能量之比也近于 3.0,故对于一个 T_k ,本文给出的 $W_{0.05}(t,k)$ 与文献[14]的理论分析基本一致,也验证了本文所给简易检验方法可行。

4 小结

在气象量时间序列分析中,小波分析方法主要用于识别不同周期(频率)振荡的强度随时间的变化。对一个气象量时间序列 $p = \{P(t), t = \overline{1, n}\}$,本文通过相空间中的几何分析,直观地阐明了 Morlet 小波功率谱计算原理,给出了一个对小波功率谱作 Monte Carlo 显著性检验的方案,这一方案中随机序列的产生与分析序列的理论分布无关,故实施简单易行。用这一方案对 6 月 100 hPa 南亚高压强度指数序列的小波功率谱进行显著性检验,结果显示它能充分揭示 p 中年际、年代际振荡随时间的变化,故

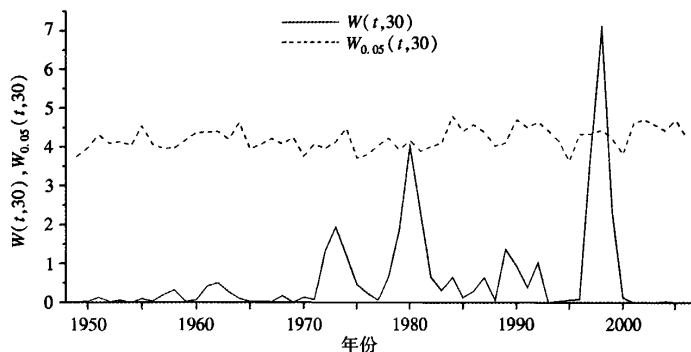


图 3 6 月 $\bar{p}(n=60)$ 的取样周期 ($T_{30}=2a$) 上的 Monte Carlo 显著性检验
(实线为 $W(t,30)$, 虚线为 $W_{0.05}(t,30)$)

Fig. 3 Monte Carlo significant test for $\bar{p}$ (its length n is 60) and the sampling period is two years
(The solid line is $W(t,30)$ and the dashed line is $W_{0.05}(t,30)$)

这一方案具有实际应用价值。

参考文献:

- [1] 林振山, 邓自旺. 子波气候诊断技术的研究[M]. 北京: 气象出版社, 1999: 1-36.
- [2] 吴洪宝, 吴蕾. 气候变率诊断和预测方法[M]. 北京: 气象出版社, 2005: 208-245.
- [3] 吴洪宝. 小波能量谱及其在热带太平洋 SSTA 多时间尺度结构研究中的应用[J]. 南京气象学院学报, 1997, 20(3): 301-307.
- [4] 邓东皋, 彭立中. 小波分析[J]. 数学进展, 1991, 20(3): 294-310.
- [5] 俞剑蔚, 王元, 沈树勤, 等. 江苏地区沙尘天气时空特征及气候变化分析[J]. 气象科学, 2008, 28(1): 45-49.
- [6] 覃军, 张录军, 胡江林. 武汉近百年来气温变化的时间尺度分析[J]. 气象科学, 2001, 21(2): 206-210.
- [7] 刘毅, 何金海, 王黎娟. 近 40 a 重庆地区夏季降水的气候特征[J]. 气象科学, 2005, 25(5): 490-498.
- [8] 杨鉴初. 运用气象要素历史变演的规律性作一年以上的长期预告[J]. 气象学报, 1953, 24(2): 100-117.
- [9] Lau K M, Weng H Y. Climate signal detection using wavelet transform: How to make a time series sing[J]. Bull Amer Meteor Soc, 1995, 76(12): 2391-2402.
- [10] Meyers S D, Kelly B G, O'Brien J J. An introduction to wavelet analysis in oceanography and meteorology: With application to the dispersion of Yanai wave[J]. Mon Wea Rev, 1993, 121(10): 2858-2866.
- [11] 邓自旺, 尤卫红, 林振山. 子波变化在全球气候多时间尺度变化分析中的应用[J]. 南京气象学院学报, 1997, 20(4): 505-510.
- [12] 余丹丹, 张韧, 洪梅, 等. 基于交叉小波于小波相干的西太平洋副高与东亚夏季风系统的关联性分析[J]. 南京气象学院学报, 2007, 30(6): 755-769.
- [13] 冯康. 数值计算方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 1978: 211-242.
- [14] Torrence C, Compo G P. A practical guide to wavelet analysis[J]. Bull Amer Meteor Soc, 1998, 79(1): 61-78.
- [15] Kestin T S, Karoly D J, Yano J I. Time-frequency variability of ENSO and stochastic simulations[J]. J Climate, 1998, 11(9): 2258-2272.
- [16] Gu Guojun, Zhang Chidong. A spectrum analysis of synoptic-scale disturbances in ITCZ[J]. J Climate, 2001, 14(6): 2725-2739.
- [17] 陈延聪, 王盘兴, 周国华, 等. 夏季南亚高压的一组环流指数及其初步分析[J]. 南京气象学院学报, 待发表.
- [18] 林振山, 丛峰, 邓自旺. El Nino 区域 SST 的空间结构[J]. 大气科学, 1997, 21(3): 324-330.
- [19] 刘贵德, 费景高, 于泳江, 等. FORTRAN 算法汇编(第二分册)[M]. 北京: 国防工业出版社, 1983: 455-477.

(责任编辑: 马奋华)