

吴建云, 周伟灿, 沈新勇. 低纬大气 Kelvin 波和 Rossby 波的非线性相互作用 [J]. 南京气象学院学报, 2008, 31 (5): 662-670.

## 低纬大气 Kelvin 波和 Rossby 波的非线性相互作用

吴建云, 周伟灿, 沈新勇

(南京信息工程大学 江苏省气象灾害重点实验室, 江苏 南京 210044)

**摘要:** 利用多重尺度摄动法, 对低纬大气 Kelvin 波和 Rossby 波的波包演变进行了分析, 得到两波的非线性相互作用方程为耦合的非线性复系数 Landau 方程组。数值计算表明两波相遇将使波振幅变化, 波宽变窄; 两波非线性相互作用可能是低纬强烈天气突然爆发的原因之一。

**关键词:** Kelvin 波; Rossby 波; 耦合非线性 Landau 方程组; 包络孤立波解

**中图分类号:** P444    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1000-2022(2008) 05-0662-09

## Nonlinear Interaction between Atmospheric Kelvin and Rossby Waves in Low Latitudes

WU Jian-yun, ZHOU Wei-can, SHEN Xin-yong

(Jiangsu Key Laboratory of Meteorological Disaster, NUIST, Nanjing 210044, China)

**Abstract** The nonlinear Kelvin and Rossby waves of atmosphere in low latitudes are studied Using the Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) method, it is found that the interaction between two wave packets is governed by the coupled nonlinear Landau equations with complex coefficients. Numerical calculations show that the wave amplitudes change and the wave widths become narrow after the collision of two solitary waves. The results indicate that the nonlinear interaction between Kelvin and Rossby waves may be one of causes which inspire the severe convective weather in low latitudes.

**Key words** Kelvin wave; Rossby wave; coupled nonlinear Landau equations; envelope solitary wave solutions

## 0 引言

自从 Matsumoto<sup>[1]</sup>首先运用赤道  $\beta$  平面近似下的浅水模式得到低纬大气中存在 Kelvin 波和混合 Rossby 重力波的结论以来, 关于 Kelvin 波和 Rossby 波的相互作用问题得到了许多学者的关注<sup>[2-12]</sup>。Domaracki 等<sup>[5]</sup>利用赤道  $\beta$  平面的浅水波方程讨论了赤道波之间的非线性相互作用。Gill<sup>[6-7]</sup>在分析热带海气相互作用的基本问题时, 对于海洋运动用了长波低频近似, 但对大气运动, 除对纬圈运动取了地转平衡条件外, 也取了定常近似, 并考虑了阻尼过程, 因此, 在 Gill 的耦合模式中, 不存在大气瞬变的 Kelvin 波和 Rossby 波。巢纪平等<sup>[8-9]</sup>保留了大气瞬变波的作用, 研究了 Kelvin 波和 Rossby 波的相互作用及综合作用。张人禾<sup>[10-11]</sup>在赤道  $\beta$  平面上取长波近似的条件下, 讨论了简单海气耦合模式中取最大径向模以及不同径向模时耦合波的性质, 即分别讨论了大气和海洋中存在 Kelvin 波、大气长 Rossby 波和海洋长 Rossby 波、大气 Kelvin 波和海洋长 Rossby 波、大气长 Rossby 波和海洋 Kelvin 波的耦合波以及大气和海洋中所有这些波动的耦合波性质。沈新勇等<sup>[12]</sup>研究了半地转近似下切变基流对赤道 Rossby 波的作用。

事实上, 在赤道及其邻近地区, Kelvin 波和 Rossby 波在大气和海洋中都是存在的。但是大多数学者在研究时为了简化处理, 均舍弃了非线性项而采用了线性的模式。大气系统是一个复杂的非线性系统, 其发

收稿日期: 2007-07-30 改回日期: 2008-06-10

基金项目: 江苏省气象灾害重点实验室资助项目 (KLME060206)

作者简介: 吴建云 (1983—), 女, 江苏如皋人, 硕士, 研究方向为微分方程及其应用, jianyunwu1983@126.com.

展、演变及异常都是由众多制约因子通过非线性机理共同实现的。因此, 研究这两种波共存时的非线性相互作用具有更普遍的意义, 它有助于揭示低纬波动相互作用的机理, 对台风的形成机制有一些潜在的应用价值, 同时对研究一些重大的天气灾害也有一定的参考价值。

本文采用多重尺度分析方法<sup>[13]</sup>对低纬大气中 Kelvin 波和 Rossby 波的波包演变进行了研究, 得知它们的演变服从非线性复系数 Landau 方程组, 分析了两波相互作用过程中能量的整体变化特征, 并考虑了在不同参数下 Kelvin 波和 Rossby 波的包络孤立波的相互作用问题。

## 1 控制方程

对赤道  $\beta$  平面上的低纬大气动力学方程组采用半地转近似, 并考虑基本气流的水平切变得到:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial y} \right) u + \beta_a v + \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \beta_{yu} = - \frac{\partial \phi}{\partial y}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi - \beta_{yu} v + c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \phi \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中: 含“-”的项为基本场, 不含“-”的项为扰动场;  $\beta_a = \frac{\partial u}{\partial y} - \beta_y$ ;  $c = \sqrt{gH}$  为表面重力波波速,  $g$  为重力加速度,  $H$  为自由面平均高度;  $\phi = \frac{p}{\rho}$ ,  $p$  为相对于背景大气的气压偏差,  $\rho$  为背景大气的密度;  $\beta$  为 Rossby 参数, 设为常数。该方程组若不考虑水平切变并去掉非线性项即为文献 [14] 中  $\delta = 0$  时的情况, 即该方程组中应包含低纬的 Kelvin 波和 Rossby 波。

## 2 关于方程的处理

参照 Domack<sup>[15]</sup>的方法, 考虑扰动波动之间是弱非线性相互作用问题。引入小参数  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ), 采用多重尺度分析法<sup>[13]</sup>, 引入缓变的时间与空间变量:

$$\begin{cases} T = t, & \begin{cases} T_1 = \varepsilon t, \\ X_1 = \varepsilon x; \end{cases} & \begin{cases} T_2 = \varepsilon^2 t, \\ X_2 = \varepsilon^2 x. \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

且在  $y$  方向仍为快变的, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial T} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial X} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X_2}, \end{aligned} \quad (3)$$

且将扰动函数展开为

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + L, \\ v &= v_0 + \varepsilon^2 v_1 + \varepsilon^3 v_2 + L, \\ \phi &= \varepsilon \phi_0 + \varepsilon^2 \phi_1 + \varepsilon^3 \phi_2 + L. \end{aligned} \quad (4)$$

同时引入算子:

$$L = \frac{\partial}{\partial T} \left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left( \frac{\beta_{yu}}{c^2} + \frac{\beta_a + y\beta_{ay}}{y\beta_a} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\beta_y \beta_a}{c^2} \right] + \frac{\partial}{\partial X} \left[ u \frac{\partial^2}{\partial y^2} - u \left( \frac{\beta_{yu}}{c^2} + \frac{\beta_a + y\beta_{ay}}{y\beta_a} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left( \frac{\beta_{yu} u_y}{c^2} + \frac{y\beta_{ay}}{\beta_a} \right) \right],$$

其中:  $\beta_{ay} = \frac{\partial \beta_a}{\partial y}$ ;  $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ 。

则得到  $\varepsilon$  的一阶问题:

$$O(\varepsilon^1): L(\phi_0) = 0 \quad (5)$$

令它有两个波包解:

$$\phi_0 = \sum_{j=1}^2 A_j (T_1, T_2, X_1, X_2) \varphi_j(y) e^{k_j(X-c_jT)} + C.C., \tag{6}$$

其中:  $k_j$  分别代表 Kelvin 波、Rossby 波的  $X$  方向的波数;  $c_j$  分别代表 Kelvin 波、Rossby 波的相速度;  $A_j$  分别代表 Kelvin 波、Rossby 波的扰动流场的复振幅, 为缓变量函数, 它由高阶问题决定;  $\varphi_j(y)$  则决定了波的径向结构;  $C.C.$  为前项的共轭。

将 (6) 式代入 (5) 式得:

$$\frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} - \left( \frac{\beta_y u}{c^2} + \frac{\beta_a + y \beta_{ay}}{y \beta_a} \right) \frac{d\varphi_j}{dy} + \left[ \frac{\beta_y (u u_y - c_j \beta_a)}{(u - c_j) c^2} + \frac{y \beta \beta_{ay}}{(u - c_j) \beta_a} \right] \varphi_j = 0 \tag{7}$$

其边界条件为  $\varphi_j(y) \Big|_{y \rightarrow \pm \infty} \rightarrow 0$

继续考虑  $O(\varepsilon^2)$  问题, 得到如下方程:

$$L(\phi_1) = - \sum_{j=1}^2 e^{k_j(X-c_jT)} f_{1j} - \sum_{j=1}^2 A_j^2 e^{ik_j(X-c_jT)} f_{2j} - A_1 A_2 e^{i[(k_1+k_2)X - (k_1 c_1 + k_2 c_2)T]} f_3 - A_1 A_2 e^{i[(k_1-k_2)X - (k_1 c_1 - k_2 c_2)T]} f_4 + C.C., \tag{8}$$

其中  $f_{1j}, f_{2j}, f_3, f_4$  均为系数。

设 (8) 式中第 1 项相对应的特解为

$$\phi_{1j}^{(1)} = \varphi_{1j}^{(1)} e^{k_j(X-c_jT)} + C.C., \tag{9}$$

则  $\varphi_{1j}^{(1)}$  满足

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_{1j}^{(1)}}{dy^2} - \left( \frac{\beta_y u}{c^2} + \frac{\beta_a + y \beta_{ay}}{y \beta_a} \right) \frac{d\varphi_{1j}^{(1)}}{dy} + \left[ \frac{\beta_y (u u_y - c_j \beta_a)}{(u - c_j) c^2} + \frac{y \beta \beta_{ay}}{(u - c_j) \beta_a} \right] \varphi_{1j}^{(1)} = \\ \frac{1}{k_j(u - c_j)} \left\{ \left[ \frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} - \left( \frac{\beta_y u}{c^2} + \frac{\beta_a + y \beta_{ay}}{y \beta_a} \right) \frac{d\varphi_j}{dy} + \frac{y \beta \beta_a}{c^2} \varphi_j \right] \frac{\partial A_j}{\partial T_1} + \right. \\ \left. \left[ u \frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} - u \left( \frac{\beta_y u}{c^2} + \frac{\beta_a + y \beta_{ay}}{y \beta_a} \right) \frac{d\varphi_j}{dy} + \left( \frac{\beta_y u u_y}{c^2} + \frac{y \beta \beta_{ay}}{\beta_a} \right) \varphi_j \right] \frac{\partial A_j}{\partial X_1} \right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

对 (10) 式两边同乘以  $\varphi_j$ , 并对  $y$  从  $-\infty$  到  $+\infty$  积分。由 (7) 式得知 (10) 式左端积分为 0, 则 (10) 式右端积分也为 0 即

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_j(u - c_j)} \frac{\partial A_j}{\partial T_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} - \left( \frac{\beta_y u}{c^2} + \frac{\beta_a + y \beta_{ay}}{y \beta_a} \right) \frac{d\varphi_j}{dy} + \frac{y \beta \beta_a}{c^2} \varphi_j \right] \varphi_j dy + \\ \frac{1}{k_j(u - c_j)} \frac{\partial A_j}{\partial X_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ u \frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} - u \left( \frac{\beta_y u}{c^2} + \frac{\beta_a + y \beta_{ay}}{y \beta_a} \right) \frac{d\varphi_j}{dy} + \left( \frac{\beta_y u u_y}{c^2} + \frac{y \beta \beta_{ay}}{\beta_a} \right) \varphi_j \right] \varphi_j dy = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

令

$$c_{gj} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ u \frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} - u \left( \frac{\beta_y u}{c^2} + \frac{\beta_a + y \beta_{ay}}{y \beta_a} \right) \frac{d\varphi_j}{dy} + \left( \frac{\beta_y u u_y}{c^2} + \frac{y \beta \beta_{ay}}{\beta_a} \right) \varphi_j \right] \varphi_j dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} - \left( \frac{\beta_y u}{c^2} + \frac{\beta_a + y \beta_{ay}}{y \beta_a} \right) \frac{d\varphi_j}{dy} + \frac{y \beta \beta_a}{c^2} \varphi_j \right] \varphi_j dy}. \tag{12}$$

将 (12) 式代入 (11) 式得:

$$\frac{\partial A_j}{\partial T_1} + c_{gj} \frac{\partial A_j}{\partial X_1} = 0 \tag{13}$$

上式表明在  $O(\varepsilon^2)$  问题中, 波振幅  $A_j$  以群速度  $c_{gj}$  传播。

再设

$$\varphi_{1j}^{(1)} = i \Phi_{1j} \frac{\partial A_j}{\partial X_1}. \tag{14}$$

将 (14) 式代入 (10) 式, 并利用 (13) 式得:

$$\frac{d^2 \Phi_{ij}}{dy^2} - \left( \frac{\beta_{yu}}{c^2} + \frac{\beta_a + y\beta_{ay}}{y\beta_a} \right) \frac{d\Phi_{ij}}{dy} + \left[ \frac{\beta_y(uu_y - c_j\beta_a)}{(u - c_j)c^2} + \frac{y\beta\beta_{ay}}{(u - c_j)\beta_a} \right] \Phi_{ij} =$$

$$- \frac{1}{k_j(u - c_j)} \left\{ (u - c_j) \left[ \frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} - \left( \frac{\beta_{yu}}{c^2} + \frac{\beta_a + y\beta_{ay}}{y\beta_a} \right) \frac{d\varphi_j}{dy} \right] + \left[ \frac{\beta_y(uu_y - \beta_a c_{gj})}{c^2} + \frac{y\beta\beta_{ay}}{\beta_a} \right] \varphi_j \right\}. \quad (15)$$

下面再令 (8) 式中第 2 3 4 项的特解为

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^{(2)} &= \varphi_j^{(2)} A_j^2 e^{2k_j(X - c_j T)} + C.C., \\ \phi_1^{(3)} &= \varphi_1^{(3)} A_1 A_2 e^{i[(k_1 + k_2)X - (k_1 c_1 + k_2 c_2)T]} + C.C., \\ \phi_1^{(4)} &= \varphi_1^{(4)} A_1 A_2 e^{i[(k_1 - k_2)X - (k_1 c_1 - k_2 c_2)T]} + C.C. \end{aligned} \quad (16)$$

所以方程 (8) 有以下形式的解:

$$\phi_1 = \phi_{11}^{(1)} + \phi_{12}^{(1)} + \phi_{11}^{(2)} + \phi_{12}^{(2)} + \phi_1^{(3)} + \phi_1^{(4)} + \Phi(y, T, X_1). \quad (17)$$

其中  $\Phi(y, T, X_1)$  为 (8) 式的齐次方程的解, 它由  $o(\varepsilon^3)$  式决定。

为了进一步得到  $A_j$  与  $\Phi$  所满足的条件, 继续考虑  $o(\varepsilon^3)$  问题, 得到如下方程:

$$\begin{aligned} L(\phi_2) = & - \sum_{j=1}^2 p_{1j} e^{k_j(X - c_j T)} - p_1 e^{k_j(X - c_1 T)} i |A_2|^2 A_1 - p_2 e^{k_j(X + c_2 T)} i |A_1|^2 A_2 - \\ & \sum_{j=1}^2 p_3 e^{2k_j(X - c_j T)} - i \sum_{j=1}^2 p_{3j} e^{3k_j(X - c_j T)} A_j^3 - p_4 e^{i[(k_1 + k_2)X - (k_1 c_1 + k_2 c_2)T]} - \\ & p_5 e^{i[(k_1 - k_2)X - (k_1 c_1 - k_2 c_2)T]} - \dot{p}_6 A_1 A_2^2 e^{i[(k_1 + 2k_2)X - (k_1 c_1 + 2k_2 c_2)T]} - \dot{p}_7 A_1^2 A_2 e^{i[(2k_1 + k_2)X - (2k_1 c_1 + k_2 c_2)T]} - \\ & \dot{p}_8 A_1 A_2^2 e^{i[(k_1 - 2k_2)X - (k_1 c_1 - 2k_2 c_2)T]} - \dot{p}_9 A_1^2 A_2 e^{i[(2k_1 - k_2)X - (2k_1 c_1 - k_2 c_2)T]} - \\ & \frac{\partial^3 \Phi}{\partial T_1 \partial y^2} + \left( \frac{\beta_{yu}}{c^2} + \frac{\beta_a + y\beta_{ay}}{y\beta_a} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T_1 \partial y} - \frac{y\beta\beta_a}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial T_1} + \\ & u \left( \frac{\beta_{yu}}{c^2} + \frac{\beta_a + y\beta_{ay}}{y\beta_a} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_1 \partial y} - u \frac{\partial^3 \Phi}{\partial X_1 \partial y^2} - \left( \frac{\beta_y u u_y}{c^2} + \frac{y\beta\beta_{ay}}{\beta_a} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} + \\ & \sum_{j=1}^2 \left[ - \left( \frac{yu\beta_{ay} + 3u\beta_a + y^2\beta_a\beta_{ay} + 2y\beta_a^2 + y^2\beta\beta_a}{y^3\beta\beta_a^2} + \frac{u^2 + 2yu\beta_a}{yc^2\beta_a} \right) \frac{d\varphi_j}{dy} \frac{d\varphi_j}{dy} + \right. \\ & \frac{y\beta_a + \beta_a}{y^2\beta\beta_a} \frac{d\varphi_j}{dy} \frac{d^2\varphi_j}{dy^2} + \left( \frac{2yu\beta_{ay} + 3u\beta_a - yu_y\beta_a - y^2\beta\beta_a}{y^2\beta\beta_a^2} + \frac{u^2}{c^2\beta_a} \right) \frac{d^2\varphi_j}{dy^2} \frac{d\varphi_j}{dy} - \\ & \frac{u}{y\beta\beta_a} \left( \frac{d^2\varphi_j}{dy^2} \frac{d^2\varphi_j}{dy^2} + \frac{d^3\varphi_j}{dy^3} \frac{d\varphi_j}{dy} \right) + \left( \frac{\beta_a + y\beta\beta_a + \beta_a^2}{c^2\beta_a} + \frac{2}{y^2\beta_a} + \frac{2\beta_{ay}}{y\beta_a^2} \right) \frac{d\varphi_j}{dy} \varphi_j - \\ & \left( \frac{2\beta_a + 2y\beta_{ay}}{y\beta_a^2} + \frac{\beta_{yu}}{c^2\beta_a} \right) \frac{d^2\varphi_j}{dy^2} \varphi_j + \frac{1}{\beta_a} \frac{d^3\varphi_j}{dy^3} \varphi_j + \\ & \left. \frac{u\beta_a + yu\beta_{ay}}{c^2 y\beta_a} \varphi_j \frac{d\varphi_j}{dy} + \frac{u}{c^2} \varphi_j \frac{d^2\varphi_j}{dy^2} + \frac{y\beta\beta_{ay}}{c^2\beta_a} |\varphi_j|^2 \right] + \\ & k_j \left[ (u - c_j) \left( \frac{2u + 4y\beta_a}{c^2 y\beta_a} + \frac{6\beta_a + 4y\beta_{ay}}{y^2\beta\beta_a^2} \right) + \frac{2\beta - u_y}{y\beta\beta_a} + \frac{\beta_{ay}}{\beta\beta_a} + \frac{1}{\beta_a} \right] \frac{d\varphi_j}{dy^2} \frac{d}{dy^2} + \\ & k_j \left[ \frac{2\beta_a + y\beta - u_y}{y\beta\beta_a} + \frac{(3c_j - 4u)\beta_a + 2y\beta_{ay}(c_j - u)}{y^2\beta\beta_a^2} + \frac{u(c_j - u)}{c^2\beta_a} \right] \left( \frac{d\varphi_j}{dy} \frac{d^2}{dy^2} \frac{d}{dy} - \frac{d^2\varphi_j}{dy^2} \frac{d}{dy} \right) + \\ & k_j \left[ \frac{(c_j - u)(y\beta_{ay} + \beta_a) - y^2u - y^2\beta\beta_a - y\beta_a^2}{c^2 y\beta_a} - \frac{2\beta_{ay}}{y\beta_a^2} - \frac{2}{y^2\beta_a} \right] \left( \varphi_j \frac{d}{dy} \frac{d}{dy} + \frac{d\varphi_j}{dy} \frac{d}{dy} \right) + \\ & k_j \left[ \frac{2\beta_a + 2y\beta_{ay}}{y\beta_a^2} + \frac{\beta_{yu} - \beta_a(c_j - u)}{c^2\beta_a} \right] \left( \varphi_j \frac{d^2}{dy^2} \frac{d}{dy} + \frac{d^2\varphi_j}{dy^2} \frac{d}{dy} \right) - \frac{k_j}{\beta_a} \left( \varphi_j \frac{d^3}{dy^3} \frac{d}{dy} + \frac{d^3\varphi_j}{dy^3} \frac{d}{dy} \right) + \end{aligned}$$

$$k_j \frac{u - c_j}{y \beta \beta_a} \left[ \frac{d \varphi_j}{dy} \frac{d^3}{dy^3} \frac{1_j}{dy} + \frac{d^3 \varphi_j}{dy^3} \frac{d}{dy} \frac{1_j}{dy} + 2 \frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} \frac{d^2}{dy^2} \frac{1_j}{dy} \right] + k_j \frac{2y \beta \beta_{ay}}{c^2 \beta_a} \varphi_j \quad \left. \vphantom{\frac{d \varphi_j}{dy}} \right\} \frac{\partial |A_j|^2}{\partial X_1} + C. C. \tag{18}$$

可以看出 (18) 式中有一类表达式与 X 和 T 无关, 考虑到它左端的线性算符, 它们应恒等于零。故特解  $\Phi$  满足:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 \Phi}{\partial T_1 \partial y^2} - \left( \frac{\beta_{yu}}{c^2} + \frac{\beta_a + y \beta_{ay}}{y \beta_a} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T_1 \partial y} + \frac{y \beta \beta_a}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial T_1} - \\ & u \left( \frac{\beta_{yu}}{c^2} + \frac{\beta_a + y \beta_{ay}}{y \beta_a} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_1 \partial y} + u \frac{\partial^3 \Phi}{\partial X_1 \partial y^2} + \left( \frac{\beta_{yuu_y}}{c^2} + \frac{y \beta \beta_{ay}}{\beta_a} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} = \\ & \sum_{j=1}^2 \left[ - \left( \frac{yu \beta_{ay} + 3u \beta_a + y^2 \beta_a \beta_{ay} + 2y \beta_a^2 + y^2 \beta \beta_a}{y^3 \beta \beta_a^2} + \frac{u^2 + 2yu \beta_a}{yc^2 \beta_a} \right) \frac{d \varphi_j}{dy} \frac{d \varphi_j}{dy} + \right. \\ & \frac{y \beta_a + \beta_a}{y^2 \beta \beta_a} \frac{d \varphi_j}{dy} \frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} + \left( \frac{2yu \beta_{ay} + 3u \beta_a - yu_y \beta_a - y^2 \beta \beta_a}{y^2 \beta \beta_a^2} + \frac{u^2}{c^2 \beta_a} \right) \frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} \frac{d \varphi_j}{dy} - \\ & \frac{u}{y \beta \beta_a} \left( \frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} \frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} + \frac{d^3 \varphi_j}{dy^3} \frac{d \varphi_j}{dy} \right) + \left( \frac{\beta_{yu} + y \beta \beta_a + \beta_a^2}{c^2 \beta_a} + \frac{2}{y^2 \beta_a} + \frac{2 \beta_{ay}}{y \beta_a^2} \right) \frac{d \varphi_j}{dy} \varphi_j - \\ & \left( \frac{2 \beta_a + 2y \beta_{ay}}{y \beta_a^2} + \frac{\beta_{yu}}{c^2 \beta_a} \right) \frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} \varphi_j + \frac{1}{\beta_a} \frac{d^3 \varphi_j}{dy^3} \varphi_j + \\ & \left. \frac{u \beta_a + yu \beta_{ay}}{c^2 y \beta_a} \varphi_j \frac{d \varphi_j}{dy} + \frac{u}{c^2} \varphi_j \frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} + \frac{y \beta \beta_{ay}}{c^2 \beta_a} | \varphi_j |^2 \right] + \\ & k_j \left[ (u - c_j) \left( \frac{2u + 4y \beta_a}{c^2 y \beta_a} + \frac{6 \beta_a + 4y \beta_{ay}}{y^2 \beta \beta_a^2} \right) + \frac{2 \beta - u_y}{y \beta \beta_a} + \frac{\beta_{ay}}{\beta \beta_a} + \frac{1}{\beta_a} \right] \frac{d \varphi_j}{dy^2} \frac{d}{dy} \frac{1_j}{dy} + \\ & k_j \left[ \frac{2 \beta_a + y \beta - u_y}{y \beta \beta_a} + \frac{(3c_j - 4u) \beta_a + 2y \beta_{ay} (c_j - u)}{y^2 \beta \beta_a^2} + \frac{u (c_j - u)}{c^2 \beta_a} \right] \left( \frac{d \varphi_j}{dy} \frac{d^2}{dy^2} \frac{1_j}{dy} - \frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} \frac{d}{dy} \frac{1_j}{dy} \right) + \\ & k_j \left[ \frac{(c_j - u) (y \beta_{ay} + \beta_a) - y^2 u - y^2 \beta \beta_a - y \beta_a^2}{c^2 y \beta_a} - \frac{2 \beta_{ay}}{y \beta_a^2} - \frac{2}{y^2 \beta_a} \right] \left( \varphi_j \frac{d}{dy} \frac{1_j}{dy} + \frac{d \varphi_j}{dy} \frac{1_j}{dy} \right) + \\ & k_j \left[ \frac{2 \beta_a + 2y \beta_{ay}}{y \beta_a^2} + \frac{\beta_{yu} - \beta_a (c_j - u)}{c^2 \beta_a} \right] \left( \varphi_j \frac{d^2}{dy^2} \frac{1_j}{dy} + \frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} \frac{1_j}{dy} \right) - \frac{k_j}{\beta_a} \left( \varphi_j \frac{d^3}{dy^3} \frac{1_j}{dy} + \frac{d^3 \varphi_j}{dy^3} \frac{1_j}{dy} \right) + \\ & k_j \frac{u - c_j}{y \beta \beta_a} \left[ \frac{d \varphi_j}{dy} \frac{d^3}{dy^3} \frac{1_j}{dy} + \frac{d^3 \varphi_j}{dy^3} \frac{d}{dy} \frac{1_j}{dy} + 2 \frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} \frac{d^2}{dy^2} \frac{1_j}{dy} \right] + k_j \frac{2y \beta \beta_{ay}}{c^2 \beta_a} \varphi_j \quad \left. \vphantom{\frac{d \varphi_j}{dy}} \right\} \frac{\partial |A_j|^2}{\partial X_1}. \tag{19} \end{aligned}$$

为了得到  $A_j$  的演化方程, 再考虑 (18) 式中的另一类非齐次解:

$$L(\phi_2) = \sum_{j=1}^2 F_j(T, T, X, X_2, y) e^{k_j(X - c_j T)} + C. C, \tag{20}$$

其中:

$$\begin{cases} F_1 = f_1 \frac{\partial A_1}{\partial T_2} + h_1 \frac{\partial A_1}{\partial X_2} + f_{10} \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + f_{11} |A_1|^2 A_1 + f_{12} |A_2|^2 A_1 + f_{13} A_{11}, \\ F_2 = f_2 \frac{\partial A_2}{\partial T_2} + h_2 \frac{\partial A_2}{\partial X_2} + f_{20} \frac{\partial A_2}{\partial X_1} + f_{21} |A_1|^2 A_2 + f_{22} |A_2|^2 A_2 + f_{23} A_{20}. \end{cases} \tag{21}$$

其中  $f_{j0} = 0$ ,  $f_j, h_j, f_{j1}, f_{j2}, f_{j3} (j = 1, 2)$  均为系数, 且有  $\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} h_j \varphi_j dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_j \varphi_j dy} = c_{gj}$ 。

设非齐次方程 (20) 的解为

$$\begin{aligned} \phi_2^{(1)} &= \varphi_2^{(1)} e^{k_j(X - c_j T)} + C. C, \\ \phi_2^{(2)} &= \varphi_2^{(2)} e^{k_j(X - c_j T)} + C. C. \end{aligned} \tag{22}$$

将 (22) 式代入 (20) 式中, 对  $j = 1, 2$  均有下式成立:

$$\frac{d^2 \varphi_2^{(j)}}{dy^2} - \left[ \frac{\beta_{yu}}{c^2} + \frac{\beta_a + y\beta_{ay}}{y\beta_a} \right] \frac{d\varphi_2^{(j)}}{dy} + \left[ \frac{\beta_y(uu_y - c_j\beta_a)}{c^2(u - c_j)} + \frac{y\beta\beta_{ay}}{\beta_a(u - c_j)} \right] \varphi_2^{(j)} = \frac{F_j}{k_j(u - c_j)}. \quad (23)$$

对 (23) 式两端同时乘以  $\varphi_j$ , 对  $y$  从  $-\infty$  到  $+\infty$  积分。等式左边积分等于零, 等式右边积分也应该等于零。这样得到可解条件:

$$\begin{cases} \left[ \frac{\partial}{\partial T_2} + c_{g1} \frac{\partial}{\partial X_2} \right] A_1 - i[\sigma_1 |A_1|^2 A_1 + \gamma_{12} |A_2|^2 A_1 + \lambda_1 A_1] = 0 \\ \left[ \frac{\partial}{\partial T_2} + c_{g2} \frac{\partial}{\partial X_2} \right] A_2 - i[\sigma_2 |A_2|^2 A_2 + \gamma_{21} |A_1|^2 A_2 + \lambda_2 A_2] = 0 \end{cases} \quad (24)$$

其中:

$$\sigma_j = -\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{jj} \varphi_j dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_j \varphi_j dy}; \quad \gamma_{12} = -\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{12} \varphi_1 dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1 \varphi_1 dy}; \quad \gamma_{21} = -\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{21} \varphi_2 dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_2 \varphi_2 dy}; \quad \lambda_j = -\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{j3} \varphi_j dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_j \varphi_j dy}. \quad (25)$$

这样得到波振幅  $A_1$  和  $A_2$  的演化方程组。将 (19) 式与 (24) 式一起称为关于  $\Phi, A_1$  和  $A_2$  的耦合方程组, 它反映了非线性相互作用对 Kelvin 波及 Rossby 波包的影响。

为了使耦合方程组 (24) 进一步简化, 仿 Jeffrey 等<sup>[15]</sup>作如下变换:

$$T = T_2, X = \frac{1}{\varepsilon}(X_2 - c_{g1}T_2) = X_1 - c_{g1}T_1. \quad (26)$$

将 (26) 式代入 (24) 式, 可化简为

$$\begin{cases} \frac{\partial A_1}{\partial T} - i\sigma_1 |A_1|^2 A_1 - i\gamma_{12} |A_2|^2 A_1 - i\lambda_1(X_1, T_1)A_1 = 0 \\ \frac{\partial A_2}{\partial T} + \frac{1}{\varepsilon}(c_{g2} - c_{g1}) \frac{\partial A_2}{\partial X} - i\sigma_2 |A_2|^2 A_2 - i\gamma_{21} |A_1|^2 A_2 - i\lambda_2(X_1, T_1)A_2 = 0 \end{cases} \quad (27)$$

对方程组 (27) 进一步处理得:

$$\begin{cases} \frac{\partial A_1}{\partial T} = i\lambda_1 A_1 + i\sigma_1 |A_1|^2 A_1 + i\gamma_{12} |A_2|^2 A_1, \\ \frac{\partial A_2}{\partial T} + c_{g2}^* \frac{\partial A_2}{\partial X} = i\lambda_2 A_2 + i\sigma_2 |A_2|^2 A_2 + i\gamma_{21} |A_1|^2 A_2. \end{cases} \quad (28)$$

其中  $c_{g2}^* = \frac{1}{\varepsilon}(c_{g2} - c_{g1})$ 。

得到 Kelvin 波和 Rossby 波的非线性相互作用方程组为耦合的非线性复系数 Landau 方程组。

### 3 两波能量的整体变化特征

考虑两波的相互作用方程 (28), 将其第 1 个方程乘以  $A_1$ , 其共轭方程乘以  $A_1$ , 将所得的两式相加可得:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} |A_1|^2 dK = 0 \quad (29)$$

同理, 从 (28) 的第 2 个方程可推得: 若  $X \rightarrow \pm\infty$  时,  $|A_2| \rightarrow 0$  则

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} |A_2|^2 dK = 0 \quad (30)$$

(29) 式和 (30) 式表明, 量  $E_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |A_1|^2 dK$  和  $E_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |A_2|^2 dK$  为时间不变量。显然,  $E_1$  和  $E_2$  分别为 Kelvin 波和 Rossby 波的能量, 这说明无论两波相互作用过程如何, 它们各自的能量是守恒的。

### 4 两包络孤立波的相互作用

为了研究 Kelvin 波和 Rossby 波的相互作用, 对前文所得的非线性耦合方程组 (28) 进行分析。本文选

取初始条件<sup>[16-17]</sup>为

$|A_{10}| = 0.5 \operatorname{sech}(X + 10.0), |A_{20}| = \operatorname{sech}(X - 20.0).$  (31)

试验中参数选取<sup>[17]</sup>为:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0, \sigma_1 = \sigma_2 = -2.0, c_{g2}^* = 1.0$

上述参数表明, Kelvin 波初始位于  $-10.0$  由西往东传播; Rossby 波初始位于  $10.0$  由东往西传播, 本文取 Kelvin 波波速大小为 Rossby 波波速的 3 倍, 两波相互作用结果如图 1 图 2 所示。由图可见:

- (1) 初始时刻 Kelvin 波的振幅为 0.5 Rossby 波的振幅为 1.0(图 1a 图 2a)。
- (2) 当相互作用系数为 3.3 时(图 1), 到  $t = 22$  时, Kelvin 波振幅比初始时刻有所增加, 两波波形开始发生变化(图 1b); 合并后两波波幅均增加, 波宽变窄, 波形发生剧烈的变化(图 1c 1d); 分离后逐渐恢复原态

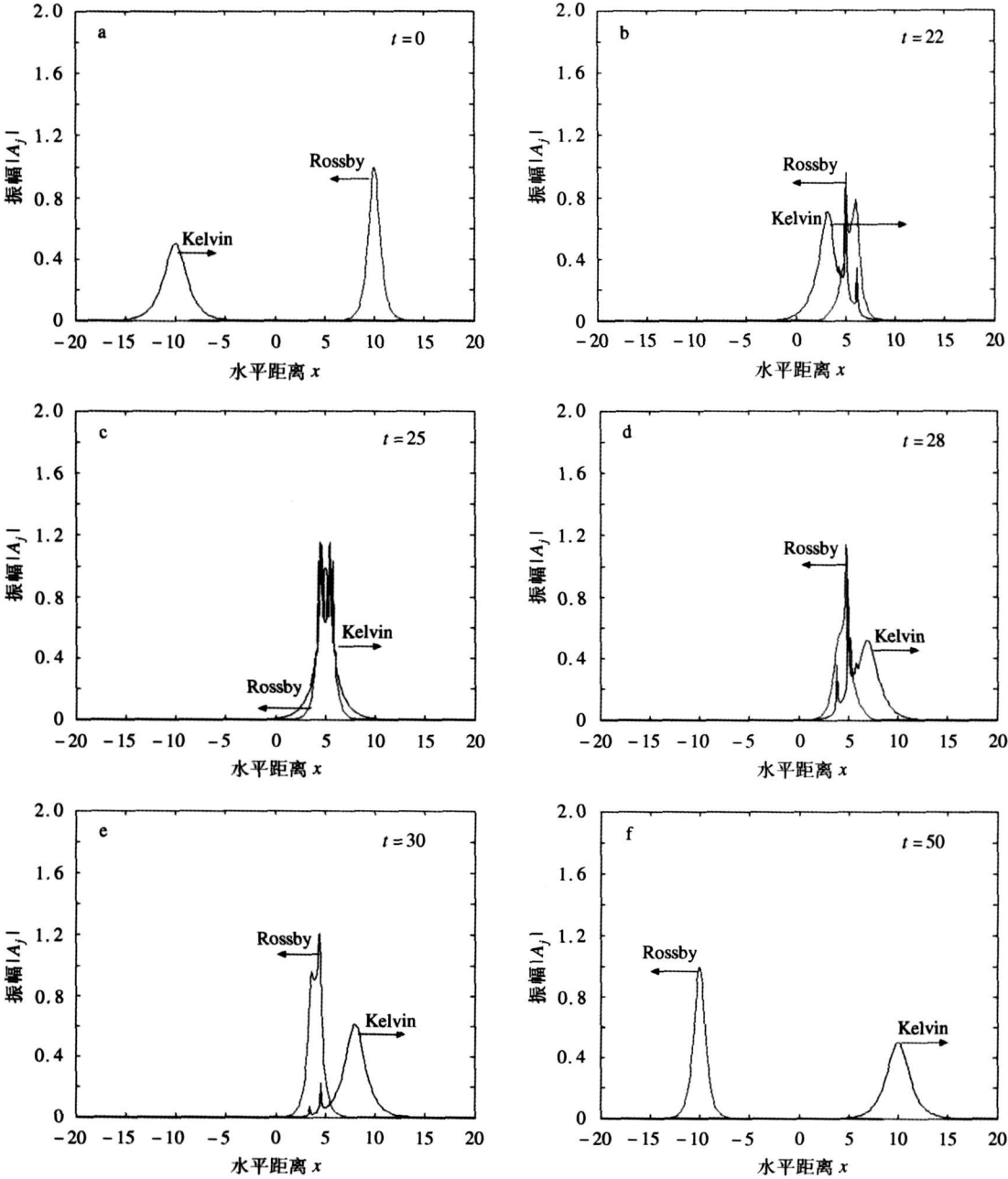


图 1 两包络孤立波的相互作用 (相互作用系数:  $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 3$ )  
a  $t = 0$  h  $t = 22$  c  $t = 25$  d  $t = 28$  e  $t = 30$  f  $t = 50$

Fig. 1 The interactions of two envelope solitary waves (interaction coefficients  $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 3$ )  
a  $t = 0$  h  $t = 22$  c  $t = 25$  d  $t = 28$  e  $t = 30$  f  $t = 50$

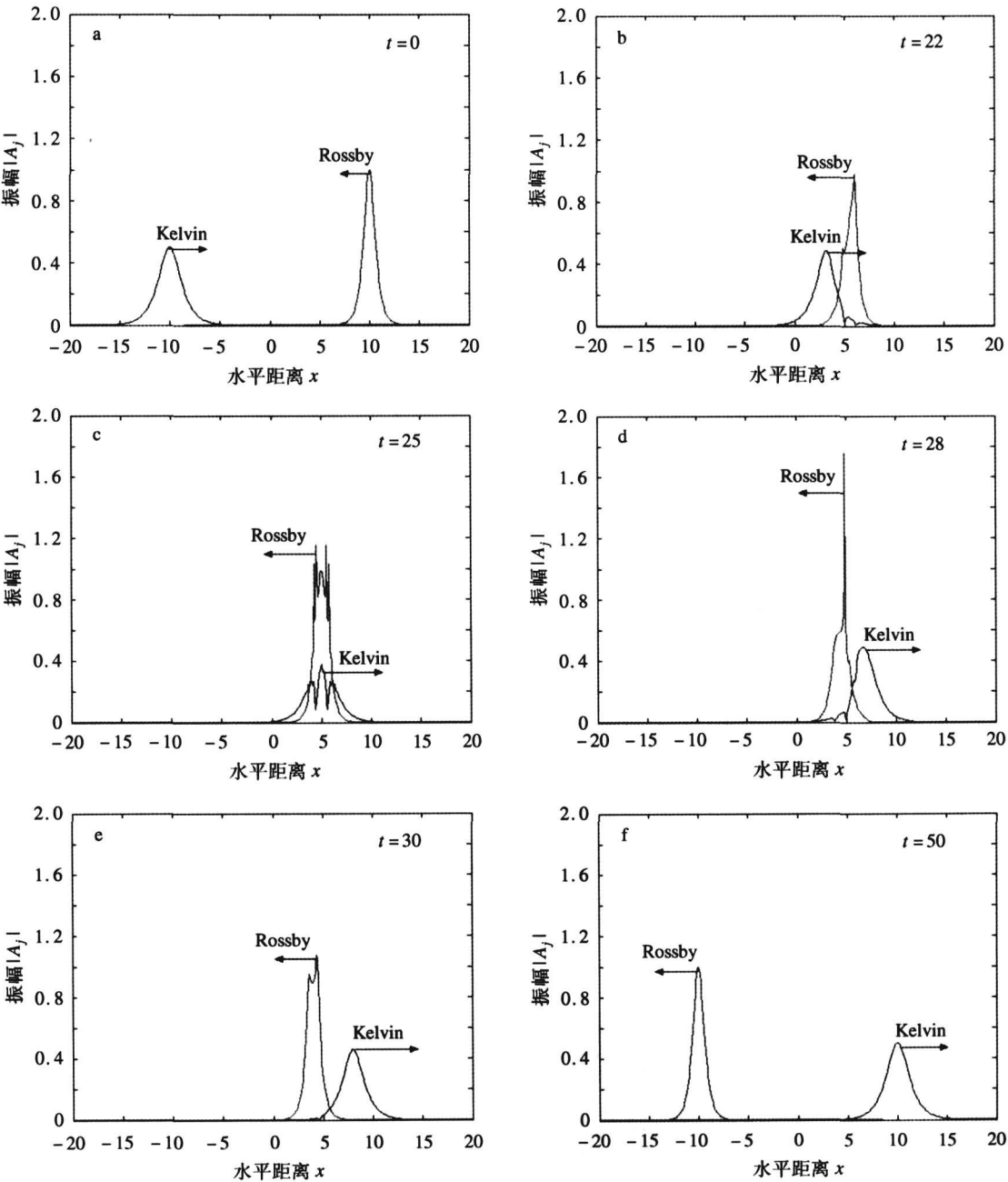


图 2 两包络孤立波的相互作用 (相互作用系数:  $\gamma_{12} = -3$   $\gamma_{21} = 3$ )

a  $t = 0$  h  $t = 22$  c  $t = 25$  d  $t = 28$  e  $t = 30$  f  $t = 50$

Fig. 2 The interactions of two envelope solitary waves (interaction coefficients  $\gamma_{12} = -3$   $\gamma_{21} = 3$ )

a  $t = 0$  h  $t = 22$  c  $t = 25$  d  $t = 28$  e  $t = 30$  f  $t = 50$

(图 1e, 1f)。

(3) 当相互作用系数为  $-3/3$  时 (图 2), 到  $t = 22$  时, Kelvin 波振幅比初始时刻有所减少, 两波波开始发生变化 (图 2b); 合并后两波波均发生变化, Kelvin 波振幅变小, Rossby 波振幅急剧增加 (图 2c, 2d); 分离后逐渐恢复原态 (图 2e, 2f)。

5 结语

(1) 对赤道  $\beta$  平面上的低纬大气动力学方程组采用半地转近似, 并考虑基本气流具有水平切变, 通过运用多重尺度分析法得出 Kelvin 波和 Rossby 波的波振幅演变满足耦合的非线性复系数 Landau 方程组, 这与

文献 [ 17-19] 中两列同种波的波振幅演变方程为薛定鄂方程的结论不同。

( 2) 对耦合的非线性复系数 Landau 方程组进行分析, 得到不论两波的相互作用过程如何, 最后它们各自的能量是守恒的, 这与文献 [ 17] 中两列同种波相互作用的能量变化特征是一致的。

( 3) 数值计算表明: 在不同的参数下, Kelvin 波和 Rossby 波的波包相互作用呈现不同的变化, 但在作用过程中均出现波振幅变化、波形急剧变化的现象, 这可能是某些强烈天气突发性形成和发生的重要机制之一。

值得注意的是, 本文在研究能量变化特征时, 仅仅考虑了它们整体的变化情况, 其相互作用过程中的具体变化特征有待详细研究。

参考文献:

[ 1] Matsuno T. Quasi-geostrophic motions in the equatorial area [ J]. J Meteor Soc Japan, 1966 44( 2): 25-43.  
[ 2] 倪允琪, 沈新勇. 热带海气耦合 Kelvin 波的弱相互作用 [ J]. 气象科学, 2000 20( 3): 367-375.  
[ 3] 沈新勇. 两种类型中尺度涡旋 Rossby 波的相速度及其物理机制 [ J]. 气象科学, 2006 26( 4): 355-364  
[ 4] 沈新勇, 何金海, 苏银兰, 等. 切变基流中赤道 Kelvin 波及纬向对称扰动的稳定性 [ J]. 气象科学, 2006 26( 6): 605-611  
[ 5] Domaracki A, Losch A Z. Nonlinear interactions among equatorial waves [ J]. J Atmos Sci 1977, 34( 3): 486-498.  
[ 6] Gill A E. Some simple solutions for heat induced tropical circulation [ J]. Quart J Roy Meteor Soc 1980 106( 1): 447-462  
[ 7] Gill A E. Elements of coupled ocean-atmosphere models for the tropics coupled ocean-atmosphere models [ J]. Elsevier Oceanography Series 1985 40( 1): 303-327  
[ 8] 巢纪平, 王彰贵. 简单的热带海气耦合波——Rossby 波和 Kelvin 波的相互作用 [ J]. 气象学报, 1993 51( 3): 257-265  
[ 9] 巢纪平, 王彰贵. 简单的热带海气耦合波——Kelvin 波和 Rossby 波的综合作用 [ J]. 气象学报, 1994 52( 1): 1-9.  
[ 10] 张人禾. 简单热带海气耦合模式中的耦合波及其稳定性( I ) [ J]. 大气科学, 1995, 19( 4): 455-464.  
[ 11] 张人禾. 简单热带海气耦合模式中的耦合波及其稳定性( II ) [ J]. 大气科学, 1995, 19( 5): 563-574.  
[ 12] 沈新勇, 赵南, 何金海, 等. 切变基流对赤道大气波动稳定性的作用 [ J]. 南京气象学 报 ■ 2006, 29( 4): 462-469.  
[ 13] 奈佛 A H. 摄动方法 [ M ]. 上海: 上海科技出版社, 1984.  
[ 14] 刘式适. 低纬大气滤波模式研究 [ J]. 热带气象, 1990 6( 2): 106-118  
[ 15] Jeffrey A, Kawahara T. Asymptotic methods in nonlinear wave theory [ M ]. New York: Pliman Publishing Inc, 1982.  
[ 16] 张铭, 黄伟健. 非线性 Kelvin 行波解的研究 [ J]. 中国科学: B 辑, 1995 25( 12): 1320-1328.  
[ 17] 谭本旭, 伍荣生. 非线性 Rossby 波及其相互作用——I . Rossby 包络孤立波的碰撞 [ J]. 中国科学: B 辑, 1993, 23( 4): 437-448.  
[ 18] 朱利华, 周伟灿, 邹兰军. 垂直切变流中非线性重力波及其相互作用 [ J]. 南京气象学院学报, 2004 27( 3): 405-412  
[ 19] 郝咏梅, 周伟灿. 非线性涡旋 Rossby 波的演变特征 [ J]. 南京气象学院学报, 2006 29( 4): 555-562