刘亚亚, 夏大峰, 赵慧芳. 一类奇异二阶三点方程组正解的存在性 [J]. 南京气象学院学报, 2008, 31(4): 599-602.

一类奇异二阶三点方程组正解的存在性

刘亚亚, 夏大峰, 赵慧芳
(南京信息工程大学 数理学院,江苏 南京 210044)

摘要: 应用不动点理论, 研究了下列奇异非线性二阶三点方程组边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+a(t)f(t,u,v)=0, & 0<t<1, \\ v''(t)+b(t)g(t,u,v)=0, & 0<t<1, \\ u'(0)=v'(0)=0, \\ u(1)+\alpha u'(\eta)=v(1)+\alpha v'(\eta)=0 \end{cases}$$

正解的存在性, 其中 $0<\eta<1$, 并且允许 $a(t)$、$b(t)$在 $t=0$和 $t=1$处奇异。

关键词: 奇异边值问题; 正解; 不动点; 锥
中图分类号: O175.8 文献标识码: A 文章编号: 1000-2022(2008)04-0599-04

Existence of Positive Solution for a Singular Second-Order Three-Point System

LIU Ya-ya, XIA Da-feng, ZHAO Hui-fang
(School of Mathematics and Physics, NUIST, Nanjing 210044, China)

Abstract By using the fixed point theorem, we show the existence of positive solutions of a singular second-order three-point system, where $0<\eta<1$, and $a(t)$, $b(t)$ are singular at $t=0$, 1.

Key words singular boundary value problem; positive solution; fixed point theorem; cone

0 引言

众所周知, 微分方程在物理学、生物学、大气科学等研究领域内有着广泛的应用, 可以根据实际问题建立微分方程模型, 而微分方程解的存在性问题一直是研究的热点问题。关于二阶非线性常微分方程和二阶非线性常微分方程组边值问题正解存在性的研究已经有了丰富的结果[1-4], 目前对非线性二阶三点方程组边值问题的研究也有许多结果。在 f, g 是超线性或次线性条件下, 利用 Krasnosel'skii不动点定理, 得到非线性二阶三点方程组[5]

$$\begin{cases} u''(t)+a(t)f(u,v)=0, & 0<t<1, \\ v''(t)+b(t)g(u,v)=0, & 0<t<1, \\ u'(0)=v'(0)=0, \\ u(1)+\alpha u'(\eta)=v(1)+\alpha v'(\eta)=0 \end{cases}$$

正解的存在性结论。本文研究了如下的奇异非线性二阶三点方程组

$$\begin{cases} u''(t)+a(t)f(t,u,v)=0, & 0<t<1, \\ v''(t)+b(t)g(t,u,v)=0, & 0<t<1, \\ u'(0)=v'(0)=0, \\ u(1)+\alpha u'(\eta)=v(1)+\alpha v'(\eta)=0 \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期: 2007-02-28; 改回日期: 2007-09-05
基金项目: 南京信息工程大学科研基金资助项目
作者简介: 刘亚亚 (1982—), 女, 江苏盐城人, 研究方向为微分方程及其应用, lyaya2004@163.com.

正解的存在性。这里 $\eta\in(0,1)$为一常数, f、g 在 $[0,1]\times[0,+\infty)\times[0,+\infty)$上连续, 并且允许 a、b 在 $t=0$ 与 $t=1$处具有奇性。

1 准备工作

记

$$f_0=\varliminf_{x+y\to 0^+}\inf_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x,y)}{x+y},\quad f^0=\varlimsup_{x+y\to 0^+}\sup_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x,y)}{x+y},\quad f_\infty=\varliminf_{x+y\to+\infty}\inf_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x,y)}{x+y},$$

$$f^\infty=\varlimsup_{x+y\to+\infty}\sup_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x,y)}{x+y},\quad g_0=\varliminf_{x+y\to 0^+}\inf_{t\in[0,1]}\frac{g(t,x,y)}{x+y},\quad g^0=\varlimsup_{x+y\to 0^+}\sup_{t\in[0,1]}\frac{g(t,x,y)}{x+y},$$

$$g_\infty=\varliminf_{x+y\to+\infty}\inf_{t\in[0,1]}\frac{g(t,x,y)}{x+y},\quad g^\infty=\varlimsup_{x+y\to+\infty}\sup_{t\in[0,1]}\frac{g(t,x,y)}{x+y}。$$

为了方便, 先列出本文要使用的假设:

(H_1) $0<\eta<1,\ \alpha>0$。

(H_2) $a(t),b(t)$ 在 $t=0,\ t=1$奇异, $a,b:(0,1)\to[0,\infty)$连续,

令 $c(t)=\max\limits_{0<t<1}\{a(t),b(t)\}$, 有 $\int_0^1 c(t)\,dt$收敛。

(H_3) $f,g:[0,1]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$连续。

令 $X=C[0,1]\times C[0,1]$, $\|(u,v)\|_1=\max\{\|u\|,\|v\|\}$, 那么 X 为一 Banach空间。定义

$$K=\{(u,v)\in X: u,v\geqslant 0\}。$$

显然, K 是 X 中的锥。由 (H_2)可定义算子 $A,B: I\times X\to C[0,1]$如下:

$$A(u,v)(t)=\int_0^1(1-s)a(s)f(s,u(s),v(s))\,ds-$$

$$\int_0^t(t-s)a(s)f(s,u(s),v(s))\,ds+\alpha\int_0^\eta a(s)f(s,u(s),v(s))\,ds,$$

$$B(u,v)(t)=\int_0^1(1-s)b(s)g(s,u(s),v(s))\,ds-$$

$$\int_0^t(t-s)b(s)g(s,u(s),v(s))\,ds+\alpha\int_0^\eta b(s)g(s,u(s),v(s))\,ds。$$

由(H_2)可知, $a(s)$在 $[0,1]$可积, 又 f 为 $[0,1]$上的连续函数, 故 f 在 $[0,1]$上也可积, 从而 $a(s)f(t,u(s),v(s))$在 $[0,1]$及其子区间上可积, 算子 A 有意义。同理可证明算子 B 有意义。

记 $T(u,v)(t)=(A(u,v)(t),B(u,v)(t))$。下面给出定理证明所要用到的几个引理。

引理 1 设 (H_1)、(H_2)、(H_3)成立, 那么 $T:K\to K$ 全连续。

证明 要证 T 全连续, 只需证 A、B 均为全连续即可。

首先 A 的连续性是显然的。

其次, 对任意有界集 $G\subset K$, 证 $A(G)\subset K$ 是一致有界的。

由 G 的有界知, 存在常数 $m>0$, 使得对 $\forall(u,v)\in G$, 有 $\|(u,v)\|\leqslant m$。

令

$$c=\max\{f(t,u,v):(t,u,v)\in[0,1]\times[0,m]\times[0,m]\},$$

$$N=\int_0^1(1-s)a(s)\,ds+\alpha\int_0^\eta a(s)\,ds+\int_0^1(1-s)a(s)\,ds,$$

则有 $\|A(u,v)\|\leqslant cN$, $(u,v)\in G$, 即 $A(G)$是一致有界的。

最后证明 $A(G)$是等度连续的。当 $t\in(0,1)$时, 有

$$\left|\frac{d}{dt}A(u,v)(t)\right|=\left|-\frac{d}{dt}\int_0^t(t-s)a(s)f(s,u(s),v(s))\,ds\right|=$$

$$\int_0^t a(s)f(s,u(s),v(s))\,ds\leqslant c\int_0^t a(s)\,ds:=x(t)。$$

下证 $x(t)\in L(0,1)$。由 (H_2), 并对 $x(t)$从 0到 1积分且交换积分顺序有

$$\int_0^1 x(t)\,dt = \int_0^1 c_0\int_0^t a(s)\,ds\,dt = c_0\int_0^1\int_s^1 a(s)\,dt\,ds =$$
$$c_0\int_0^1(1-s)a(s)\,ds \leqslant 2c_0\int_0^1 c(s)\,ds < +\infty。$$

从而 $x(t)\in L(0,1)$, 由积分绝对连续性知: $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$, 当 $t_1, t_2\in[0,1]$, $|t_1-t_2|<\delta$时, 对 $\forall\ (u,v)\in G$ 有

$$|A(u,v)(t_1)-A(u,v)(t_2)| \leqslant \left|\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}A(u,v)(t)\right| \leqslant \left|\int_{t_1}^{t_2}x(t)\,dt\right| < \varepsilon。$$

故 $A(G)$是等度连续的。因此 $A: K\to K$ 全连续。同理可证 $B: K\to K$ 也是全连续的。故 $T: K\to K$ 全连续。

显然 $(u,v)\in X$ 是方程组(1)的正解当且仅当 $(u,v)\in X$ 是 T 的不动点。

设 K 是实 Banach空间 E 中的锥, 令

$$K_r = \{(u,v)\in K: \|(u,v)\| \leqslant r\};\ \partial K_r = \{(u,v)\in K: \|(u,v)\| = r\};$$
$$\overline{K_{r,R}} = \{(u,v)\in K: r\leqslant\|(u,v)\|\leqslant R\}。这里\ 0<r<R<\infty。$$

引理 **2**[6]　设K 是 Banach空间 E 中的锥, $T:\overline{K_R}\to K$ 是全连续算子。如果以下两条件成立:

(i)　$\|Tu\| \leqslant \|u\|,\ \forall u\in\partial K_r$,

(ii)　存在 $e\in\partial K_1$, 使得 $x\neq Tx+\lambda e,\ x\in\partial K_R,\ \lambda>0$,

那么 T 在 $K_{r,R}$中存在不动点。如果(i)在∂K_R 上成立, 且(ii)在 ∂K_r 上成立, 则结论仍然成立。

2　主要结果

定理 **1**　假设条件(H_1)、(H_2)、(H_3)成立, 并且 f, g 满足下列条件之一:

(1) $0\leqslant f^0<M_1,\ 0\leqslant g^0<M_2$且 $m_1<f_\infty<\infty$　or　$m_2<g_\infty<\infty$,

(2) $0\leqslant f^\infty<M_1,\ 0\leqslant g^\infty<M_2$且 $m_1<f_0<\infty$　or　$m_2<g_0<\infty$,

则奇异二阶三点方程组(1)至少有一正解, 其中:

$$M_1 = \frac{1}{2}\left(\int_0^1(1-s)a(s)\,ds + \alpha\int_0^\eta a(s)\,ds\right)^{-1},$$
$$M_2 = \frac{1}{2}\left(\int_0^1(1-s)b(s)\,ds + \alpha\int_0^\eta b(s)\,ds\right)^{-1};$$
$$m_1 = \left[\int_0^1(1-s)a(s)\,ds - \int_0^\eta(\eta-s)a(s)\,ds + \alpha\int_0^\eta a(s)\,ds\right]^{-1},$$
$$m_2 = \left[\int_0^1(1-s)b(s)\,ds - \int_0^\eta(\eta-s)b(s)\,ds + \alpha\int_0^\eta b(s)\,ds\right]^{-1}。$$

证明　显然方程组(1)有正解的充要条件是全连续算子 $T: K\to K$ 有不动点。

(a)假设(1)成立, 由 $0\leqslant f^0<M_1,\ 0\leqslant g^0<M_2$知, 存在 $r>0$, 使得当 $u+v\in[0,r]$时有

$$f(t,u,v)\leqslant M_1(u+v),\ g(t,u,v)\leqslant M_2(u+v),$$

于是当 $(u,v)\in\partial K_r$, 即 $\|(u,v)\| = \max\{\|u\|, \|v\|\} = r$时, 有

$$A(u,v)(t) = \int_0^1(1-s)a(s)f(s,u(s),v(s))\,ds -$$
$$\int_0^t(t-s)a(s)f(s,u(s),v(s))\,ds + \alpha\int_0^\eta a(s)f(s,u(s),v(s))\,ds \leqslant$$
$$M_1\left(\int_0^1(1-s)a(s)(u(s)+v(s))\,ds + \alpha\int_0^\eta a(s)(u(s)+v(s))\,ds\right) \leqslant$$
$$M_1\left(\int_0^1(1-s)a(s)\,ds + \alpha\int_0^\eta a(s)\,ds\right)(\|u\|+\|v\|) \leqslant$$
$$2M_1\left(\int_0^1(1-s)a(s)\,ds + \alpha\int_0^\eta a(s)\,ds\right)\max\{\|u\|, \|v\|\} \leqslant \|(u,v)\|。$$

同理可得: $B(u,v)\leqslant\|(u,v)\|$。故可得 $\|T(u,v)\|\leqslant\|(u,v)\|,\ \forall\ (u,v)\in\partial K_r$。

另一方面,由$m_1 < f_\infty < \infty$知,存在$R > r$,使得 $0 \leqslant t \leqslant 1$, $u+v \in [R, +\infty)$时,有 $f(t,u,v) \geqslant m_1(u+v)$。令 $\bar{R} = \gamma^{-1}R$,这里 $\gamma = \min\left\{\frac{1-\eta}{1+\alpha-\eta}, 1-\eta\right\}$, $\phi(t,u,v) = \varphi(t,u,v) \equiv 1$, $t \in [0,1]$,即$(\phi, \varphi) \in \partial K_1$。

下面证明

$$(u,v) \neq T(u,v) + \lambda(\phi, \varphi), \ (u,v) \in \partial K_{\bar{R}}, \ \lambda > 0。$$

假设上式不成立,则存在$(u_0, v_0) \in \partial K_{\bar{R}}$, $\lambda_0 > 0$,使得

$$(u_0, v_0) = T(u_0, v_0) + \lambda_0(\phi(t,u_0,v_0), \varphi(t,u_0,v_0)),$$

即
$$u_0 = A(u_0,v_0) + \lambda_0\phi(t,u_0,v_0), v_0 = B(u_0,v_0) + \lambda_0\varphi(t,u_0,v_0)。$$

令 $\delta = \min\{u_0(t)+v_0(t): 0 < t < \eta\}$,则对$\forall t \in (0,\eta)$,有

$$\begin{aligned}
&u_0(t) + v_0(t) \geqslant A(u_0,v_0) + \lambda_0(\phi(t,u_0,v_0) + \varphi(t,u_0,v_0)) \geqslant \\
&m_1\left[\int_0^1 (1-s)a(s)(u_0+v_0)ds - \int_0^t (t-s)a(s)(u_0+v_0)ds + \alpha\int_0^\eta a(s)(u_0+v_0)ds + 2\lambda_0 \geqslant \right. \\
&m_1\delta\left[\int_0^1 (1-s)a(s)ds - \int_0^t (t-s)a(s)ds + \alpha\int_0^\eta a(s)ds\right] + 2\lambda_0 \geqslant \delta + 2\lambda_0。
\end{aligned}$$

矛盾。所以由引理 2知 T 在$\overline{K_{r,\bar{R}}}$中存在不动点(u,v)。

类似$m_1 < f_\infty < \infty$的情形,对于$m_2 < g_\infty < \infty$同样可以证得结论。

(b)设(2)成立,由于 $0 < f^\infty < M_1$,故可选择 $\tau \in (f_\infty, M_1)$,使得$\exists R_1 > 0$,有 $f(t,u,v) \leqslant \tau(u+v)$对任意$u+v \in [R_1, +\infty)$关于 t一致成立。又 f连续,知有

$$N_1 = \max\{f(t,u,v): t \in [0,1], u,v \geqslant 0 且 u+v \leqslant R_1\} < \infty。$$

故有 $0 \leqslant f(t,u,v) \leqslant N_1 + \tau(u+v)$。

令
$$R = \frac{N_1}{2(M_1-\tau)}$$

则对$\forall t \in [0,1]$, $(u,v) \in \partial K_R$ 有

$$\begin{aligned}
A(u,v)(t) &= \int_0^1 (1-s)a(s)f(s,u(s),v(s))ds - \\
&\int_0^t (t-s)a(s)f(s,u(s),v(s))ds + \alpha\int_0^\eta a(s)f(s,u(s),v(s))ds \leqslant \\
&\left(\int_0^1 (1-s)a(s)ds + \alpha\int_0^\eta a(s)ds\right)\|N_1 + \tau(u+v)\| \leqslant \\
&\frac{(N_1 + 2\tau\|(u,v)\|)}{2M_1} = \frac{N_1}{2(M_1-\tau)} = \|(u,v)\|。
\end{aligned}$$

同理有 $B(u,v) \leqslant \|(u,v)\|$。故可得 $\|T(u,v)\| \leqslant \|(u,v)\|$ 对$\forall t \in [0,1]$, $(u,v) \in \partial K_R$ 成立。

另一方面由$m_1 < f_0 < \infty$知$\exists r \in (0,R)$使得当 $0 < u+v < r$时 $f(t,u,v) \geqslant m_1(u+v)$关于 $t \in [0,1]$一致成立。

类似于**(a)**的证明,可知对$(u,v) \in \partial K_r$,存在$(\phi, \varphi) \in \partial K_1$, $\lambda > 0$有 $(u,v) \neq T(u,v) + \lambda(\phi, \varphi)$。故由引理 2知 T 在$\overline{K_{r,R}}$中存在不动点$(u,v)$。

类似于$m_1 < f_0 < \infty$的情形可知,对于$m_2 < g_0 < \infty$同样可以证得结论。

参考文献:

[1] 杨志林,孙经先. 非线性二阶常微分方程组边值问题的正解[J]. 数学学报, 2004, 47(1): 111-118.

[2] 李仁贵,刘立山. 二阶奇异非线性微分方程组边值问题的正解[J]. 应用数学与力学, 2001, 22(4): 435-439.

[3] Ma Ruyun. Positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problem[J]. Electronic J Differential Equations, 1999(34): 1-8.

[4] Gupta C P. Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for a second order ordinary differential equation[J]. Math Anal Appl, 1992, 168(2): 540-551.

[5] 李淑红,孙永平,方雅敏. 一类二阶三点方程组正解的存在性[J]. 浙江师范大学学报: 自然科学版, 2005, 28(4): 372-378.

[6] Amann H. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces[J]. SLAM Rev, 1976, 18(4): 620-709.