霍晓音, 李刚. 一类奇异半线性椭圆型方程 Dirichlet问题 [J]. 南京气象学院学报, 2008, 31(1): 135–138

一类奇异半线性椭圆型方程 Dirichlet问题

霍晓音, 李刚
(南京信息工程大学 数理学院,江苏 南京　210044)

摘要: 应用奇异非线性 Dirichlet问题的上下解方法以及极大值原理, 得到了一类奇异半线性 Dirichlet问题正古典解的存在性, 最后进一步给出解的正则性。

关键词: 奇异方程; 古典解的存在性; 正则性
中图分类号: O175. 26　　文献标识码: A　　文章编号: 1000-2022(2008) 01-0135-04

On a Singular Semilinear Elliptic Dirichlet Problem

HUO Xiao-yin, LI Gang
(School of Mathematics and Physics, NUIST, Nanjing　210044, China)

Abstract: Using the super-sub-solution method and the maximum principle, the existence result of positive classical solutions for a singular semilinear elliptic Dirichlet problem is obtained. We also establish the regularity of classical solution to the problem(1).

Key words: singular equation; existence of classical solutions; regularity

0　问题背景

本文考虑一类奇异半线性 Dirichlet问题

$$\begin{cases} -\Delta u + k(x)u^{-\alpha} = \lambda u^p + \sigma, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

古典解 (在 $C^{2,\gamma}(\Omega) \cap C(\Omega)$ 中)的存在性。其中, Ω是 R^N $(N \geqslant 2)$ 中的有界域, 并且 $\partial\Omega \in C^{2,\gamma}$, $\gamma \in (0, 1)$, $\alpha \in (0, 1)$, $\lambda \geqslant 0$, $\sigma > 0$, $p > 0$, $k(x) \in C^1(\Omega)$, $k(x) > 0 (x \in \Omega)$。

问题 (1)出现在广义渗流问题、反应扩散问题中的催化问题、以及非牛顿流体问题中。已有很多学者讨论过该类型方程古典解的存在性。Zhang[1]讨论了当 $\sigma = 0$, $\lambda \neq 0$, $k(x) \equiv 1$时, 如果 $0 < \alpha < 1$, $0 < p < 1$,则存在 $\lambda \in (0, \infty)$, 使得当 $\lambda > \lambda$时, (1)中至少存在一个解 $u_\lambda \in C^{2,\gamma}(\Omega) \cap C(\Omega)$, 而当 $\lambda < \lambda$时, (1)不存在古典解。周韶林[2]讨论了当 $\sigma > 0$, $p > 0$, $\lambda \geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$, $k(x) \equiv 1$时古典解的存在性, 并得到: 若 $\alpha \in (0, 1)$, $p \in (0, 1)$, 则存在正常数 σ, 使得当 $\sigma \geqslant \sigma$时, 对任意的 $\lambda \geqslant 0$, 问题 (1)存在古典解; 若 $\alpha \in (0, 1)$, $p \geqslant 1$, 则存在正常数 σ和 λ, 使得当 $\sigma > \sigma$, $\lambda < \lambda$时, 问题 (1)存在古典解。Shi等[3]讨论了当存在 $\lambda^* \in (0, \infty)$, 使得当 $\lambda > \lambda^*$, 问题 (1)存在古典解; $\lambda < \lambda^*$ 时, 问题 (1)无解。

本文主要考虑下面的两种情形:

C_1, $\lim\limits_{d(x)\to 0} k(x) = 0$, 其中 $d(x) = d(x, \partial\Omega)$;

C_2, $\lim\limits_{d(x)\to 0} k(x) = +\infty$, 且存在 $1 > \beta > \alpha$, 以及正常数 m_0, 使得对于任意 $x \in \Omega$有

$$k(x)\,\omega_\beta^{\beta-\alpha}(x) \leqslant m_0。$$

其中, $\omega_\beta(x) \in C^{2,\gamma}(\Omega) \cap C(\Omega)$ 是下述问题中当 $\alpha = \beta$时的解[4]:

收稿日期: 2006-10-13; 改回日期: 2006-12-27
基金项目: 国家重点基础研究发展计划项目 (2004CB418302)
作者简介: 霍晓音 (1981—), 男, 山西阳泉人, 硕士, 研究方向为非线性偏微分方程理论及应用, huoxiaoyin24188@ sina. com.

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{1}{u^{\alpha}},\ x \in \Omega; \\ u > 0,\ x \in \Omega; \\ u = 0,\ x \in \partial\Omega。 \end{cases} \tag{2}$$

1　预备知识和主要结果

在证明主要结果之前,先给出相关的定义和引理。

定义 1　函数 $\underline{u}$ 称为问题(1)的下解,如果 $\underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega)$ 并且满足

$$\begin{cases} -\Delta u + k(x)u^{-\alpha} \leqslant \lambda u^p + \sigma,\ x \in \Omega; \\ u > 0,\ x \in \Omega; \\ u = 0,\ x \in \partial\Omega。 \end{cases} \tag{3}$$

定义 2　函数 u 称为问题(1)的上解,如果 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega)$ 并且满足

$$\begin{cases} \Delta u + k(x)u^{-\alpha} \geqslant \lambda u^p + \sigma,\ x \in \Omega; \\ u > 0,\ x \in \Omega; \\ u = 0,\ x \in \partial\Omega。 \end{cases} \tag{4}$$

引理 1[5]　对于下述问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u),\ x \in \Omega; \\ u > 0,\ x \in \Omega; \\ u = 0,\ x \in \partial\Omega。 \end{cases} \tag{5}$$

$f \in C^1(\Omega \times (0, \infty), R)$, f 在 $\partial\Omega$ 处没有定义(特别具有奇性)。

若问题(5)存在上解 u 和下解 $\underline{u}$, u、$\underline{u} \in C^{2,\gamma}(\Omega)$ 并且 $\underline{u} \leqslant u\ (x \in \Omega)$, 则问题(5)在序区间 $[\underline{u}, u]$ 中至少存在一个解 $u \in C^{2,\gamma}(\Omega) \cap C(\Omega)$。

引理 2[6]　若 $p\ (0, 1)$, 则对任意的 $\sigma > 0$, $\lambda \geqslant 0$, 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^p + \sigma,\ x \in \Omega, \\ u > 0,\ x \in \Omega, \\ u = 0,\ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

都存在唯一解 $\omega_{\lambda\sigma} \in C^{2,\gamma}(\Omega)$。

引理 3[2]　若 $p \geqslant 1$, 则对任意的 $\sigma > 0$, 存在 $\lambda \in (0, +\infty)$, 使得当 $\lambda < \lambda$ 时, 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^p + \sigma,\ x \in \Omega, \\ u > 0,\ x \in \Omega, \\ u = 0,\ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{7}$$

存在解 $\omega_{\lambda\sigma} \in C^{2,\gamma}(\Omega)$; 而当 $\lambda > \lambda$ 时, 问题(7)无解。

记 φ_1 为特征值问题[7]

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u,\ x \in \Omega, \\ u > 0,\ x \in \Omega, \\ u = 0,\ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{8}$$

相应于第 1 特征值为 λ_1 的特征函数, 则 $\lambda_1 > 0$, $\varphi_1 \in C^{2,\gamma}(\Omega)$, 并 Hopf 引理可知, $\forall x \in \partial\Omega$, $\therefore \varphi_1(x) \neq 0$。

引理 4　若 $\alpha \in (0, 1)$, $k \in C^1(\Omega)$,

(1) 当 $k(x)$ 满足条件 C_1 时, 则存在正常数 m_1 和 σ_1, 使得当 $\sigma \geqslant \sigma_1$ 时, $\underline{u} = m_1 \varphi_1^{\frac{2}{1+\alpha}}$ 满足

$$-\Delta\underline{u} + k(x)\underline{u}^{-\alpha} \leqslant \sigma,\ x \in \Omega。 \tag{9}$$

(2) 当 $k(x)$ 满足条件 C_2 时, 则存在正常数 m_0 和 σ_2, 使得当 $\sigma \geqslant \sigma_2$ 时, $\underline{u} = m_0^{\frac{1}{1+\alpha}} \omega_\beta$ 满足式(9)。

(1) $k(x)$ 满足条件 C_1 的情况

令 $k\big|_{\partial\Omega} = 0$, 则 $k \in C(\Omega)$, 故可定义 $\tau = |k(x)|_\infty = \max\limits_{x \in \Omega} |k(x)|$。因为

$$-\Delta\underline{u}+k(x)\underline{u}^{-\alpha}=\frac{2m_1\lambda_1}{1+\alpha}\varphi_1^{\frac{2}{1+\alpha}}+\left[k(x)m_1^{-\alpha}-\frac{2m_1(1-\alpha)|\nabla\varphi_1|^2}{(1+\alpha)^2}\right]\varphi_1^{-\frac{2\alpha}{1+\alpha}}。\tag{10}$$

由 φ_1 的性质可得, 存在 $\sum\subset\Omega$ 和正常数 δ_0、C_0, 使得

$$|\nabla\varphi_1|\geqslant C_0,\ x\in\overline{\sum};\ \varphi_1\geqslant\delta_0,\ x\in\Omega\setminus\sum。\tag{11}$$

因此, 在 $\overline{\sum}$ 上可选取正常数 m_1 满足

$$\tau\cdot m_1^{-\alpha}-\frac{2m_1(1-\alpha)C_0^2}{(1+\alpha)^2}\leqslant 0,$$

在 $\Omega\setminus\sum$ 上, 可选取 m_1 满足

$$\tau\cdot m_1^{-\alpha}\cdot\varphi_1^{-\frac{2\alpha}{1+\alpha}}\leqslant\frac{\lambda_1 m_1}{1+\alpha}\delta_0^2。$$

令 $m_1=\max\left\{\left[\frac{\tau(1+\alpha)}{\lambda_1\delta_0^2}\right]^{\frac{1}{1+\alpha}},\left[\frac{\tau(1+\alpha)^2}{2(1-\alpha)C_0^2}\right]^{\frac{1}{1+\alpha}}\right\}$, 则有

$$-\Delta\underline{u}+k(x)\underline{u}^{-\alpha}\leqslant\frac{3\lambda_1 m_1}{1+\alpha}\varphi_1^{\frac{2}{1+\alpha}},\ x\in\Omega。$$

令 $\sigma_1=\frac{3\lambda_1 m_1}{1+\alpha}|\varphi_1|_\infty^{\frac{2}{1+\alpha}}$, 则当 $\sigma\geqslant\sigma_1$ 时, 有

$$-\Delta\underline{u}+k(x)\underline{u}^{-\alpha}\leqslant\sigma,\ x\in\Omega。$$

(2) $k(x)$ 满足条件 C_2 的情况

令 $\underline{u}=m_0^{\frac{1}{1+\alpha}}\omega_\beta$, $\sigma_2=\frac{2m_0^{\frac{1}{1+\alpha}}}{\omega_\beta^\beta}$, 且 $\sigma\geqslant\sigma_2$, 则由条件 C_2 得

$$-\Delta\underline{u}+k(x)\underline{u}^{-\alpha}=\frac{m_0^{\frac{1}{1+\alpha}}}{\omega_\beta^\beta}+\frac{k(x)}{[m_0^{\frac{1}{1+\alpha}}\omega_\beta]^\alpha}\leqslant\sigma,\ x\in\Omega。$$

引理 4得证。

引理 **5**　令 $\omega_{\lambda\sigma}$ 是问题 (6)或 (7)的解。

(1)设 $k(x)$ 满足条件 C_1, $\sigma\geqslant\sigma_1$ 时, 则

$$m_1\varphi_1^{\frac{2}{1+\alpha}}\leqslant\omega_{\lambda\sigma}\ (x\in\Omega);$$

(2)设 $k(x)$ 满足条件 C_2, $\sigma\geqslant\sigma_2$ 时, 则

$$m_0^{\frac{1}{1+\alpha}}\omega_\beta\leqslant\omega_{\lambda\sigma}\ (x\in\Omega)。$$

引理 5可直接运用极大值原理得到。

关于解的存在性, 本文主要得到下述结果。

定理 **1**　若 $\alpha\in(0,1)$, $p\in(0,1)$, $k(x)$ 满足条件 C_1 或 C_2 时, 则存在正常数 σ_1 或 σ_2, 使得当 $\sigma\geqslant\overline{\sigma_1}$ 或 $\sigma\geqslant\overline{\sigma_2}$ 时, 对任意的 $\lambda\geqslant 0$, 问题 (1)存在古典解。

定理 **2**　若 $\alpha\in(0,1)$, $p\geqslant 1$, $k(x)$ 满足条件 C_1 或 C_2 时, 则存在正常数 σ_1 或 σ_2 和 λ, 使得当 $\sigma\geqslant\overline{\sigma_1}$ 或 $\sigma\geqslant\sigma_2$, $\lambda<\lambda$ 时, 问题 (1)存在古典解。

明显地, 如果 $k(x)$ 不在 $\partial\Omega$ 附近趋于零的话, 问题 (1) 即不存在 $C^2(\Omega)$ 解。

关于问题 (1)解的全局正则性, 本文得到定理 3。

定理 **3**　设 λ, $\sigma\in(0,\infty)$, u 是问题 (1) 的任一 $C^{2,\gamma}(\Omega)\cap C(\Omega)$ 解, 则 $u\in H_0^1(\Omega)$。

2　定理的证明

(1)定理 1及定理 2的证明

注意到当 $k(x)$ 满足条件 C_1, $\sigma\geqslant\sigma_1$ 时, 由引理 4(1) (或引理 4(2)) 知 $u=m_1\varphi_1^{\frac{2}{1+\alpha}}$ 是问题 (1) 的下解,

而由引理 2(或引理 3) 知 $\omega_{\lambda\sigma}$ 是问题 (1) 的上解, 由引理 5和引理 1可知, 问题 (1) 在序区间 $[m_1\varphi_1^{\frac{2}{1+\alpha}}, \omega_{\lambda\sigma}]$ 至少存在一个解 $u_{\lambda\sigma}\in C^{2,\gamma}(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$; 同理当 $k(x)$ 满足条件 C_2, $\sigma\geqslant\sigma_2$ 时, $\underline{u}=m_0^{\frac{1}{1+\alpha}}\omega_\beta$ 是问题 (1) 的下解, 而 $\omega_{\lambda\sigma}$ 是问题 (1) 的上解, 由引理 5和引理 1可知, 问题 (1) 在 $[m_0^{\frac{1}{1+\alpha}}\omega_\beta, \omega_{\lambda\sigma}]$ 至少存在一个古典解。定理 1和定理 2得证。

(2)定理 3的证明

令

$$\Omega_m=\left\{x\in\Omega \,\middle|\, d(x,\partial\Omega)>\frac{1}{m}, m\in N\right\},$$

则有

$$\Omega_m\subset\subset\Omega,\quad u\in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega}_m);$$
$$-\Delta u+k(x)u^{-\alpha}=\lambda u^p+\sigma,\quad x\in\Omega_m。$$

应用 Green恒等式可得

$$\int_{\Omega_m}|\nabla u|^2dx-\int_{\partial\Omega_m}u\cdot\frac{\partial u}{\partial n}ds+\int_{\Omega_m}k(x)u^{1-\alpha}dx=\lambda\int_{\Omega_m}u^{p+1}dx+\sigma\int_{\Omega_m}u\,dx。\tag{12}$$

注意到不管 $k(x)$ 满足 C_1 还是 C_2, $k(x)>0(x\in\Omega_m)$, 从而有

$$\int_{\Omega_m}|\nabla u|^2dx-\int_{\partial\Omega_m}u\cdot\frac{\partial u}{\partial n}ds<\lambda\int_{\Omega}u^{p+1}dx+\sigma\int_{\Omega}u\,dx。\tag{13}$$

注意到, $\frac{\partial u(x)}{\partial n}\leqslant\varliminf_{\delta\to 0^-}\frac{u(x+sn)-u(x)}{s}\leqslant 0$, $\forall x\in\partial\Omega$, $u\big|_{\partial\Omega}=0$。在 (13)式中, 令 $m\to+\infty$, 可得

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx<\lambda\int_{\Omega}u^{p+1}dx+\sigma\int_{\Omega}u\,dx。\tag{14}$$

既然 $u\in C(\bar{\Omega})$, 对于给定的 λ和 σ, 结合 (14) 式可得 $\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx$ 有界, 由 $u\in C^{2,\gamma}(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ 知, $u\in H_0^1(\Omega)$。

参考文献:

[1] Zhang Zhijun. On a Dirichlet problem with a singularity nonlineariy[J]. J Math Anal Appl, 1995, 194(1): 103-113.

[2] 周韶林. 关于一类奇异非线性 Dirichlet问题 [J]. 西北师范大学学报: 自然科学版, 1996, 32(1): 20-23.

[3] Shi Junping, Yao Miaoxin. On a singular nonlinear semilinear elliptic problem[J]. Proc Roy Soc Edinb, 1998, 128A(6): 1389-1401.

[4] Lazer A C, Mckenna P L. On a singular nonlinear elliptic boundary-value problem[J]. Proc Amer Math Soc, 1991, 111(3): 721-730.

[5] 张志军, 李有伟. 一类奇异非线性椭圆边值问题 [J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 1995, 31(1): 5-9.

[6] Amann H. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Bananch spaces[J]. SIAM Rev, 1976, 18(4): 620-709.

[7] Lions P L. On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations[J]. SIAM Rev, 1982, 24(4): 441-467.