一类带阻尼项 Duffing型方程周期解的存在性

许敏, 周伟灿
(南京信息工程大学 江苏省气象灾害重点实验室, 江苏 南京 210044)

摘要: 考虑带有阻尼项的 Duffing型方程的边值问题, 在 Banach空间上运用 Leray-Schauder度理论证明其周期解的存在性。

关键词: Duffing型方程; 阻尼项; Leray-Schauder度; 周期解
中图分类号: O175.14 文献标识码: A 文章编号: 1000-2022(2007)04-0571-04

On the Existence of Periodic Solution for a kind of Duffing Equation with Damping

XU Min, ZHOU Wei-can
(Jiangsu Key Laboratory of Meteorological Disaster, NUIST, Nanjing 210044, China)

Abstract: For the boundary value problem of Duffing type equation with damping, we obtain the existence of the periodic solutions by virtue of Leray-Schauder degree theory in Banach space.

Key words: Duffing type equation; damping term; Leray-Schauder degree theory; periodic solution

0 引言

本文考虑带有阻尼项的 Duffing型方程的周期边值问题:

$$\begin{cases} u''(t) + \alpha\dfrac{d}{dt}\nabla F(u(t)) + \nabla G(u(t)) = f(t),\ t\in(0, 2\pi), \\ u(0) = u(2\pi),\ u'(0) = u'(2\pi)。\end{cases} \tag{1}$$

其中: $u\in \mathbf{R}^n$; $F, G\in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$; $f\in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$; $f(t+2\pi) = f(t)$。

当 $\alpha = 0$时, 对应标准的 Duffing型方程。Duffing型方程周期解的存在性及唯一性问题, 因其涉及领域广泛, 在实际中也有着重要应用而备受人们关注, 如气象中的重力惯性波问题[1]。研究这类方程通常有动力系统方法、代数方法、非线性分析方法等, 而非线性分析方法又包括变分与临界点理论[2]、拓扑度同伦方法[3]、上下解与单调迭代方法[4]、微分同胚方法[5-6]、不动点方法[7-8]等。本文采用类似文献[9]的方法, 在 Banach空间上运用 Leray-Schauder度理论证明(1)式周期解的存在性, 此时 $\alpha = 1$。

1 预备知识

设 $X = \{u(t) \mid u: [0, 2\pi]\to \mathbf{R}^n, u(t) = (u_i(t))_{n\times 1}, u_i\in L^2[0, 2\pi]\}$。

定义内积: 对 $\forall u, v\in X$, $(u, v) = \int_0^{2\pi} \langle u(t), v(t)\rangle dt = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{2\pi} u_i(t)v_i(t)dt$, 则 X 为 Hilbert空间, 其范数为 $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$。

记 $D = \{u \mid u\in X, u'_i$在$[0, 2\pi]$绝对连续, $u''_i\in L^2[0, 2\pi]$, $u_i(0) = u_i(2\pi), u'_i(0) = u'_i(2\pi)\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$。

收稿日期: 2007-02-26; 改回日期: 2007-05-16
基金项目: 江苏省气象灾害重点实验室资助项目(KLME060206)
作者简介: 许敏(1982-), 女, 江苏海安人, 硕士, 研究方向: 微分方程, bing_d@163.com.

线性算子 $L: D \to X$ 由 $Lu = -u''$ 定义, 则 L 为 D 上的稠定自伴闭算子。设 λ_i 为 L 的特征值, 有 $L\Phi_i = \lambda_i \Phi_i$, $i = 1, 2, \cdots$, Φ_i 为 Hilbert空间 X 下的标准正交基。图范数 $\| | \cdot | \|: X \to R$ 定义为 $\| | u | \| = \| u \| + \| Lu \|$, $\forall u \in D$, 因图范数与 Sobolev 范数 $\| u \| + \| u' \| + \| u'' \|$ 是等价的, 据 Sobolev 嵌入定理[10], D 可以紧嵌入到 $C_n^1[0, 2\pi]$, 其中 $C_n^1[0, 2\pi] = \{u: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n \mid u_i$ 在 $[0, 2\pi]$ 有连续的一阶导数$\}$。

D 在图范数 $\| | \cdot | \|$ 下是 Banach空间。本文在 Banach空间下考虑问题。设 $G(u)$ 有连续的二阶偏导数, 记 $(Nu)(t) = -\nabla G(u(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, 则 $\boldsymbol{Q}(u) = \dfrac{\partial^2 G(u)}{\partial x_i \partial x_j}$, $\boldsymbol{Q}(u)$ 对 $\forall u \in \mathbf{R}^n$ 为对称阵。这里, 假设 $\| \boldsymbol{Q}(u) \| \leqslant \eta$ (η 为一实数)。

设 $\lambda_k(u)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 是 $\boldsymbol{Q}(u)$ 在 $u \in \mathbf{R}^n$ 的特征值, $\lambda_1(u) \geqslant \lambda_2(u) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(u)$。如果存在整数 N_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$, 则有

$$N_k^2 < \lambda_k(u) < (N_k + 1)^2, \quad k = 1, 2, \cdots, n。 \tag{2}$$

文献[5]中有如下的引理存在。

引理 1 假设存在整数 N_k, $k = 1, 2, \cdots, n$, 使得(2)式成立, 则对于任取的 $f \in D$, 线性系统

$$Lu - \boldsymbol{Q}u = f \tag{3}$$

在 D 内存在唯一的解 u, 且满足 $\| u \| \leqslant C \| f \|$。这里 $L - \boldsymbol{Q}$ 在 D 上是可逆的且 $\| (L - \boldsymbol{Q})^{-1} \| \leqslant C$, $C = \{\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (\lambda_k - N_k^2, (N_k + 1)^2 - \lambda_k)\}^{-1}$。

2 主要结论

在 Banach空间 X 内, 假设 $\boldsymbol{Q}_1(u, v)$ 满足

$$Nu - Nv = -\boldsymbol{Q}_1(u, v)(u - v), u, v \in D。 \tag{4}$$

假设 $Lu = -u''$, $Nu = -\nabla G(u)$, 则方程(1)可化为

$$Lu + Nu = \frac{d}{dt}\nabla F(u) - f。 \tag{5}$$

在(4)式中, 令 $v = 0$, 则 $Nu - N(0) = -\boldsymbol{Q}_1(u, 0)(u - 0)$。记 $\boldsymbol{Q}_1(u, 0) = \boldsymbol{Q}(u)$, 则 $Nu - N(0) = -\boldsymbol{Q}(u)u$, 所以(5)式可以化为

$$Lu - \boldsymbol{Q}(u)u = \frac{d}{dt}\nabla F(u) - N(0) - f。 \tag{6}$$

于是给出定理 1。

定理 1 考虑边值问题

$$\begin{cases} u''(t) + \dfrac{d}{dt}\nabla F(u(t)) + \nabla G(u(t)) = f(t), \\ u(0) = u(2\pi), u'(0) = u'(2\pi)。 \end{cases} \tag{7}$$

其中: $\dfrac{d}{dt}\nabla F(u) = \boldsymbol{H}_F(u)u'$, $\left(\boldsymbol{H}_F(u) = \dfrac{\partial^2 F(u)}{\partial u_i \partial u_j}\right)$。假设 $F(u)$ 有连续的二阶有界偏导数, 即 $\boldsymbol{H}_F(u)$ 是连续有界的, 且满足 $\| \boldsymbol{H}_F(u) \| = O(\| u' \|^{-1})$, $N(0) + f$ 有界, 则(7)式在 Banach空间 $C_n^1[0, 2\pi]$ 内至少存在一个周期解。

证明 问题(7)中方程可以化为(6)式。

取固定的 $w \in C_n^1[0, 2\pi]$, 考虑 $Lu - \boldsymbol{Q}(w)u = \dfrac{d}{dt}\nabla F(w) - N(0) - f$, 再变形为

$$Lu - \boldsymbol{Q}(w)u = \boldsymbol{H}_F(w)w' - N(0) - f。 \tag{8}$$

由引理 1可知, 方程(8)式对任意的 $w \in C_n^1[0, 2\pi]$ 都存在唯一的解 u, 且满足 $\| u \| \leqslant C \| \boldsymbol{H}_F(w)w' - N(0) - f \|$。

而

$$\| | u | \| = \| u \| + \| Lu \| \leqslant C \| \boldsymbol{H}_F(w)w' - N(0) - f \| + \| \boldsymbol{Q}(w)u + \boldsymbol{H}_F(w)w' - N(0) - f \| \leqslant$$
$$C \| \boldsymbol{H}_F(w)w' - N(0) - f \| + \| \boldsymbol{Q}(w) \| \cdot C \cdot \| \boldsymbol{H}_F(w)w' - N(0) - f \| + \| \boldsymbol{H}_F(w)w' - N(0) - f \| =$$

$$\|\boldsymbol{H}_F(w)w'-N(0)-f\|(C+C\|\boldsymbol{Q}(w)\|+1)\leqslant$$
$$(\|\boldsymbol{H}_F(w)w'\|+\|N(0)+f\|)(C+C\|\boldsymbol{Q}(w)\|+1)\leqslant$$
$$(\|\boldsymbol{H}_F(w)\|\cdot\|w'\|+\|N(0)+f\|)(C+C\|\boldsymbol{Q}(w)\|+1)。$$

因为题设中假设 $\|\boldsymbol{H}_F(u)\|=O(\|u'\|^{-1})$, 则设 $\|\boldsymbol{H}_F(u)\|\leqslant a\|u'\|^{-1}$, 取 a 为适当大的常数, 所以有 $\||u|\|\leqslant(a+\|N(0)+f\|)(C+C\|\boldsymbol{Q}(w)\|+1)\leqslant K(a+\|N(0)+f\|)$。

这里由前可知: $\|\boldsymbol{Q}(w)\|\leqslant\eta$, 令 $C+C\|\boldsymbol{Q}(w)\|+1\leqslant C+C\eta+1\leqslant K$。

现定义映射 $\Gamma: C_n^1[0,2\pi]\to D$, 使得 $\Gamma w=u$。

假设 $\Gamma w_i=u_i$, $i=1,2,\dots,n$。设 u_1, u_2 是满足方程的解, 即有

$$Lu_1-\boldsymbol{Q}(w_1)u_1=\boldsymbol{H}_F(w_1)w'_1-N(0)-f,$$
$$Lu_2-\boldsymbol{Q}(w_2)u_2=\boldsymbol{H}_F(w_2)w'_2-N(0)-f。$$

上述两式相减得

$$L(u_1-u_2)-\boldsymbol{Q}(w_1)(u_1-u_2)=(\boldsymbol{Q}(w_1)-\boldsymbol{Q}(w_2))u_2+\boldsymbol{H}_F(w_1)w'_1-\boldsymbol{H}_F(w_2)w'_2。\tag{9}$$

可以发现, (9)式类似于 (8)式, 则有

$$\||u_1-u_2|\|=\||\Gamma w_1-\Gamma w_2|\|\leqslant$$
$$\|(\boldsymbol{Q}(w_1)-\boldsymbol{Q}(w_2))u_2+(\boldsymbol{H}_F(w_1)w'_1-\boldsymbol{H}_F(w_2)w'_2)\|(C+C\|\boldsymbol{Q}(w_1)\|+1)\leqslant$$
$$K(\|(\boldsymbol{Q}(w_1)-\boldsymbol{Q}(w_2))u_2\|+\|\boldsymbol{H}_F(w_1)w'_1-\boldsymbol{H}_F(w_2)w'_2\|)。$$

这里 $C+C\|\boldsymbol{Q}(w_1)\|+1\leqslant K$ 也是成立的。

先考虑 $\|\boldsymbol{H}_F(w_1)w'_1-\boldsymbol{H}_F(w_2)w'_2\|$项:

$$\|\boldsymbol{H}_F(w_1)w'_1-\boldsymbol{H}_F(w_2)w'_2\|=\|(\boldsymbol{H}_F(w_1)-\boldsymbol{H}_F(w_2))w'_1+\boldsymbol{H}_F(w_2)(w'_1-w'_2)\|\leqslant$$
$$\|\boldsymbol{H}_F(w_1)-\boldsymbol{H}_F(w_2)\|\cdot\|w'_1\|+\|\boldsymbol{H}_F(w_2)\|\cdot\|w'_1-w'_2\|。$$

如前面所定义, 映射 $\Gamma: C_n^1[0,2\pi]\to D$。这里, 令 $K(a+\|N(0)+f\|)\leqslant R$, 取 $B_R=\{u\in D,\ \||u|\|<R\}$, 可以得到: $\|u\|\leqslant\||u|\|<R$。

因为图范数与 Sobolev范数 $\|u\|+\|u'\|+\|u''\|$是等价的, 所以 $\|u'\|<k_1R$, $\|u''\|<k_2R$ (k_1, k_2 为常数)都是成立的。

由上可得:

$$\||\Gamma w_1-\Gamma w_2|\|\leqslant$$
$$K(\|(\boldsymbol{Q}(w_1)-\boldsymbol{Q}(w_2))u_2\|+\|\boldsymbol{H}_F(w_1)-\boldsymbol{H}_F(w_2)\|\cdot\|w'_1\|+\|\boldsymbol{H}_F(w_2)\|\cdot\|w'_1-w'_2\|)\leqslant$$
$$K(\|\boldsymbol{Q}(w_1)-\boldsymbol{Q}(w_2)\|\cdot R+\|\boldsymbol{H}_F(w_1)-\boldsymbol{H}_F(w_2)\|\cdot k_1R+a\|w'_2\|^{-1}\cdot\|w'_1-w'_2\|)。\tag{10}$$

因为 $\boldsymbol{Q}(w)$, $\boldsymbol{H}_F(w)$连续, 所以可取适当大的 δ满足$\frac{\varepsilon R}{3Ka}>\delta>0$, 使得当 $\||w_1-w_2|\|<\delta$时, 有 $\|\boldsymbol{Q}(w_1)-\boldsymbol{Q}(w_2)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3KR}$, $\|\boldsymbol{H}_F(w_1)-\boldsymbol{H}_F(w_2)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3Kk_1R}$。

对于 (10)式第 3项, 需证明 $\|w'_1-w'_2\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3Ka\|w'_2\|^{-1}}$, 即 $\|w'_1-w'_2\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3Ka\|w'_2\|^{-1}}\leqslant\frac{\varepsilon\|w'_2\|}{3Ka}\leqslant\frac{\varepsilon\cdot k_1R}{3Ka}$, 这样才能得到 $\||\Gamma w_1-\Gamma w_2|\|<\varepsilon$。由上述图范数的性质, 可以得到当 $\||w_1-w_2|\|<\delta$时, 有 $\|(w_1-w_2)'\|\leqslant k_1\delta$。而由$\frac{\varepsilon R}{3Ka}>\delta>0$, 可知 $\|(w_1-w_2)'\|\leqslant k_1\delta\leqslant\frac{k_1\varepsilon R}{3Ka}$。

所以此时 $\||\Gamma w_1-\Gamma w_2|\|<\varepsilon$, 得到 $\Gamma: C_n^1[0,2\pi]\to D$ 是连续的。

由预备知识可知, D 可以紧嵌入到 $C_n^1[0,2\pi]$, 而 $D\subset C_n^1[0,2\pi]$, 所以可以得到 $\Gamma: C_n^1[0,2\pi]\to C_n^1[0,2\pi]$是全连续的。定义 $B'_R=\{u\in C_n^1[0,2\pi],\ \||u|\|<R\}$, 此时 Γ 在 B'_R内也是全连续的。

设 $S: [0,1]\times B'_R\to\boldsymbol{H}$, $S(t,w)=w-t\Gamma w$。可以得到, S 在 $[0,1]\times\partial B'_R$ 上 $\neq0$。这里是因为 $w\in C_n^1[0,2\pi]$时, $\||w|\|<R$, $\||\Gamma w|\|<R$, 而在 $\partial B'_R$ 上 $\||w|\|=R$。通过 Leray-Schauder度的同伦不变性可知: $\deg(I-\Gamma,B'_R,0)=\deg(I,B'_R,\Gamma)=1$。

所以至少存在一个 $w \in B'_R$，使得 $\Gamma w = w$。即 $Lw - \boldsymbol{Q}(w)w = \boldsymbol{H}_F(w)w' - N(0) - f$成立。故此定理得证，边值问题(7)在空间 $C_n^1[0, 2\pi]$内至少存在一个周期解。

参考文献:

[1] 沈新勇，倪允琪，丁一汇. 斜压基流中的非线性中尺度重力惯性波[J]. 气象科学，2002, 22(4): 387-393.

[2] Lassoued L. Periodic solutions of a second order superquadratic systems with a change of sign in the potential[J]. J Diff Equs, 1991, 93: 1-18.

[3] Ge Weigao. On the existence of harmonic solutions of Linard systems[J]. Nonlinear Anal, 1991, 16(2): 183-190.

[4] Nieto J J. Nonlinear second-order periodic boundary value problems[J]. J Math Anal Appl, 1988, 130: 22-27.

[5] Shen Zuhe. On the periodic solution to the Newtonian equation of motion[J]. Nonlinear Analysis TMA, 1989, 13(2): 145-149.

[6] Shen Zuhe, Wolfe M A. On the existence of periodic solutions of periodically perturbed conservative systems[J]. J Math Anal Appl, 1990, 153(1): 78-83.

[7] 周伟灿，邹兰军. Linard型方程周期解的存在性[J]. 南京气象学院学报，2005, 28(5): 657-661.

[8] 邹兰军，周伟灿，朱利华. 受迫 Linard方程周期解的存在性[J]. 南京气象学院学报，2004, 27(6): 822-827.

[9] Peter W Bates. Solutions of nonlinear elliptic systems with meshed spectra[J]. Nonlinear Analysis TMA, 1979, 4(6): 1023-1030.

[10] Adams R A. Sobolev Space[M]. New York: Academic Press, 1975.