第 29卷第 5期 南京气象学院学报 Vol. 29 No. 5
2006年 10月 Journal of Nanjing Institute of Meteorology Oct. 2006

文章编号: 1000-2022(2006)05-0713-05

图的圈和路剖分问题

陈丽娟
(南京信息工程大学 数学系,江苏 南京 210044)

摘 要: 设 G 是一个顶点数为 n 的图, k 为任意正整数且 $k\leqslant n$, 证明了如果图 G 中任何一对不相邻顶点的最大度至少为 $\frac{n-k+1}{2}$, 则 G 能剖分成 k 个子图 H_i, $1\leqslant i\leqslant k$, 其中 H_i 是圈或路; 如果 G 是 2-连通图, $\sigma_2^*(G)=\min\{d_G(x)+d_G(y)\mid x, y\in V(G), x\neq y, d(x,y)=2\}\geqslant n-k$, G 也能剖分成 k 个子图 H_i, $1\leqslant i\leqslant k$, 其中 H_i 是圈或路。
关键词: 剖分; 子图; 最大度; 圈; 路
中图分类号: O157.5 文献标识码: A

Graph Partition Problems into Cycles and Paths

CHEN Li-juan
(Department of Mathematics, NUIST, Nanjing 210044, China)

Abstract Let G be a graph of order n and k any positive integer with $k\leqslant n$. We prove if the maximum degree of any pair of nonadjacent vertices is at least $\frac{n-k+1}{2}$, or G is a 2-connected graph and $\sigma_2^*(G)=\min\{d_G(x)+d_G(y)\mid x, y\in V(G), x\neq y, d(x,y)=2\}\geqslant n-k$, then G can be partitioned into k subgraphs H_i, $1\leqslant i\leqslant k$, where H_i is a cycle or a path.
Key words partition; subgraph; maximum degree; cycles; paths

0 引言

文中 G 表示有限简单图, 文中术语、符号除特殊标明外, 皆同文献[1]。设图 G, 令 $|G|=|V(G)|$, $\sigma_2(G)=\min\{d_G(x)+d_G(y)\mid x, y\in V(G), x\neq y, xy\notin E(G)\}$, 当 G 为完全图时, 定义 $\sigma_2(G)=\infty$。

$$\sigma'_2(G)=\min\{\max\{d_G(x), d_G(y)\}\mid x, y\in V(G), x\neq y, xy\notin E(G)\},$$

$$\sigma_2^*(G)=\min\{d_G(x)+d_G(y)\mid x, y\in V(G), x\neq y, d(x,y)=2\}。$$

本文只解决顶点集的剖分, 故文中所有出现的“不交”均指“顶点不交”。

收稿日期: 2004-12-13; 改回日期: 2005-06-29
作者简介: 陈丽娟(1973-), 女, 江苏靖江人, 讲师, 硕士, 主要从事图论的研究, clj_99@sohu.com.

设 $H_1, H_2, \cdots, H_k$ 为 G 的不交子图, 使得 $V(G)=\bigcup_{i=1}^{k}V(H_i)$, 其中 H_i 是圈或路, $1\leqslant i\leqslant k$, 则 $\bigcup_{i=1}^{k}V(H_i)$ 是 G 的一个具有 k 个连通分支的 2-因子。在文献 [1] 中已给出了 2-因子存在的一个充分条件。

定理 **A** 设 $|G|=n\geqslant 4k$, $\sigma_2(G)\geqslant n$, 则 G 剖分成 k 个圈, 即 G 包含 k 个不交的圈 $H_1, H_2, \cdots, H_k$ 满足 $V(G)=\bigcup_{i=1}^{k}V(H_i)$。

如果将 K_1 和 K_2 都看作退化的圈, 文献 [2] 中给出了比定理 A 更弱一些的充分条件。

定理 **B**[2] 设 G 是一个为顶点数 n 的图, k 为任意正整数, 且 $k\leqslant n$, 如果 $\sigma_2(G)\geqslant n-k+1$, 则除了 $G=C_5$, $k=2$ 外, G 能被分成 k 个子图 H_i, H_i 为圈或 K_1 或 K_2, $1\leqslant i\leqslant k$。

定理 **C**[3] 设 G 是一个顶点数为 n 的图, k 为任意正整数, 且 $k\leqslant n$, 如果 $\sigma_2(G)\geqslant n-k$, 则 G 能剖分成 k 个子图 H_i, H_i 是圈或路, $1\leqslant i\leqslant k$。

在定理 B 和定理 C 的基础上, 本文证明了下面两个定理。

定理 1 设 G 是一个顶点数为 n 的图, k 为任意正整数且 $2\leqslant k\leqslant n$。

如果 $\sigma'_2(G)=\min\left\{\max\{d_G(x), d_G(y)\}\,\middle|\, x, y\in V(G), x\neq y, xy\notin E(G)\right\}\geqslant\dfrac{n-k+1}{2}$, 则 G 能剖分成 k 个子图 H_i, H_i 是圈或路, $1\leqslant i\leqslant k$。

特别地, 当 G 是一个 2-连通图, 有:

定理 2 设 G 是一个顶点数为 n 的 2-连通图, k 为任意正整数且 $k\leqslant n$。

如果 $\sigma_2^*(G)=\min\left\{d_G(x)+d_G(y)\,\middle|\, x, y\in V(G), x\neq y, d(x, y)=2\right\}\geqslant n-k$, 则 G 剖分成 k 个子图 H_i, H_i 是圈或路, $1\leqslant i\leqslant k$。

注释 1 定理 C 不能被定理 1 推导。

如果 $G=C_6$, $k=2$, 则 G 不满足定理 1 的条件, 而 $\sigma_2(G)=4\geqslant n-k=4$。显然, G 满足定理 C。

注释 2 定理 1 也不能被定理 C 推导。

若 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_6, v_7\}$, $V(K_6)=\{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$, $G=(K_6-\{v_1v_4, v_2v_4\})\cup\{v_7\}$。当 $k=2$ 时, G 不满足定理 C 的条件, 而 $\sigma'_2(G)=3\geqslant\dfrac{n-k+1}{2}=3$。显然, G 满足定理 1。

注释 3 一般意义上定理 2 中的条件, 不能再改进。

例如: $G=K_{m+k+1, m}\ (m\geqslant 2)$, $\sigma_2^*(G)=2m=n-k-1$。但 G 不能分成 k 个子图 H_i, H_i 为圈或路。

1 断言

断言 0 若 G 有 $n-k$ 条独立边或 $k=2$, 则定理 1 成立。

证明 如果 G 有 $n-k$ 条独立边, 则这 $n-k$ 条独立边和 G 除了这些边的顶点外, 其余的 $n-2(n-k)=2k-n$ 个顶点, 构成所要的 k-剖分。

如果 $k=2$, 则 $\dfrac{n-k+1}{2}=\dfrac{n-1}{2}$。令 $S_1=\left\{v\,|\,d_G(v)\geqslant\dfrac{n-1}{2}\right\}$, $S_2=\left\{v\,|\,d_G(v)<\dfrac{n-1}{2}\right\}$。显然, $V(G)=S_1\cup S_2$。

如果 $S_1=\phi$ 或 $S_2=\phi$, 则结论显然成立, 不妨假设 $S_1\neq\phi$, $S_2\neq\phi$。

显然, 若 $\langle S_2\rangle$ 是 G 的完全子图, 则 $\langle S_2\rangle$ 中有一个 Hamilton 圈或 $\langle S_2\rangle$ 为 K_1 或 K_2, 用 H_2 来表示。

考虑 S_1。如果 $|S_1|=1$ 或对于任意 $v\in S_1$ 有 $d_{S_1}(v)\geqslant\dfrac{|S_1|-1}{2}$, 则 S_1 必有一条 Hamilton 路, 从而得到所需的剖分。否则, S_1 中必有一个顶点 $u_1\in S_1$, 使得 $d_{S_1}(u_1)<\dfrac{|S_1|-1}{2}$, 从而 $d_{S_2}(u_1)>\dfrac{n-1}{2}-\dfrac{|S_1|-1}{2}=\dfrac{|S_2|}{2}$。

如果 $|S_2|=1$, 则 $\langle S_2\cup\{u_1\}\rangle=K_2$, 当 $|S_2|\geqslant 2$ 时, H_2 中必有两个相邻的顶点与 u_1 相邻, 将 u_1 添加到 H_2 中, 构成 $\langle S_2\cup\{u_1\}\rangle$ 中一个新的 Hamilton 圈 $\tilde{C}$, 用 H'_2 来表示 K_2 或 $\tilde{C}$。令 $S'_1=\langle S_1-\{u_1\}\rangle$, $S'_2=\langle S_2\cup\{u_1\}\rangle$。如果 $|S'_1|=1$ 或对 $v\in S'_1$ 都有 $d_{S'_1}(v)\geqslant\dfrac{|S'_1|-1|}{2}$, 则 S'_1 中有一条 Hamilton 路, 从而得到剖分, 否

则存在 $u'_1 \in S'_1$, 使 $d_{S'_1}(u'_1) < \frac{|S'_1|-1}{2}$, 从而有 $d_{S'_2}(u'_1) > \frac{|S'_1|-1}{2} = \frac{|S'_2|}{2}$。因此, H'_2 存在两相邻顶点与 u'_1 相邻, 再将 u'_1 添加到 H'_2 中, 构造 $\langle S'_2 \cup \{u'_1\}\rangle$ 中新的 Hamilton 圈, 用 H''_2 表示。令 $S''_1 = \langle S'_1 - \{u'_1\}\rangle$, $S''_2 = \langle S'_2 \cup \{u'_1\}\rangle$。因为 $|S_1|$ 是有限的, 重复使用上述方法, 就能得到 G 的 2-剖分。

断言成立。

注释 4 类似于断言 0的证明, 如果 $\sigma'_2(G) \geqslant \frac{n+1}{2}$, 则 G 能剖分成 2个同构于圈或 K_1 或 K_2 的子图。显然, 若 G 是一个 2-连通图, 当 $k=1$ 结论也成立。

断言 1 若 G 中每个圈的长度至少为 $n-k+1$, 则定理 1结论成立。

证明 令 C 为最短圈, 则 $|C| \geqslant n-k+1 \geqslant 4$, C 中无弦。

容易看出 C 能剖分成 $|C|-(n-k)$ 条路, 从而 G 可以剖分成 $|C|-(n-k)$ 条路和 $n-|C|$ 个点。

下面两个断言的证明类似于定理 E, 在这里略去证明过程。

断言 2 如果 R_2 中存在一顶点 x, x 在 $H \cup \{c_2, c_4, c_6, \cdots, c_p\}$ 中至少有一邻点, 则 $\left|N(x) \cap \left(H \cup C\right)\right| = 1$。

断言 3 $H \cup \{c_2, c_4, c_6, \cdots, c_p\}$ 是独立集。

断言 4 $H \cup \{c_2, c_4, c_6, \cdots, c_p\}$ 中存在两个顶点, 它们在 R_2 中最大度至多为 $\frac{|R_2|}{2}$。

证明 由 p 为偶数, $u_1 \in H$, 则 $|H \cup \{c_2, c_4, c_6, \cdots, c_p\}| \geqslant 3$。

如果断言不成立, 则 $H \cup \{c_2, c_4, c_6, \cdots, c_p\}$ 中必有两个顶点, 它们在 R_2 中度大于 $\frac{|R_2|}{2}$。于是 R_2 中存在一点, 此点在 $H \cup \{c_2, c_4, c_6, \cdots, c_p\}$ 中至少有两个邻点, 这与断言 2矛盾。

断言 5 $|H| \leqslant k-1$。

证明 由断言 3和断言 4, 存在 $x_1, x_2 \in H \cup \{c_2, c_4, c_6, \cdots, c_p\}$, 且 $\max\{d_{R_2}(x_1), d_{R_2}(x_2)\} \leqslant \frac{|R_2|}{2}$。于是 $\frac{|n-k+1|}{2} \leqslant \max\{d_G(x_1), d_G(x_2)\} \leqslant \frac{p}{2} + \frac{|R_2|}{2} = \frac{n-|H|}{2}$。

2 定理 1的证明

定理 1 设 G 是一个顶点数为 n 的图, k 为任意正整数且 $2 \leqslant k \leqslant n$。

如果 $\sigma'_2(G) = \min\{\max\{d_G(x), d_G(y)\} \mid x, y \in V(G), x \neq y, xy \notin E(G)\} \geqslant \frac{n-k+1}{2}$, 则 G 能剖分成 k 个子图 H_i, H_i 是圈或路, $1 \leqslant i \leqslant k$。

通过对 n 归纳来证明定理 1。容易验证, 当 $n \leqslant 3$ 时, 结论成立。

当 $n \geqslant 4$, 假设对不超过 $n-1$ 个顶点的图结论成立。据断言 0, 设 $n \geqslant k$, $k \geqslant 3$。

当 $n=k$, 显然成立。当 $n=k+1$ 时, 因为 $\sigma'_2(G) \geqslant 1$, G 中至少有一条边, 结论也成立。

当 $n=k+2$, $\sigma'_2(G) \geqslant \frac{3}{2}$, G 中至少存在某一顶点 w, 且 w 有两个不同的邻点 u 和 v, 则 G 可以剖分成 uwv 和 $k-1$ 个点。因此, 可以假设 $n \geqslant k+3$。

由于 $\sigma'_2(G) \geqslant \frac{n-k+1}{2} \geqslant 2$, G 不是森林。

据断言 1, 只考虑下面情形: 若 G 中存在一圈长度至多 $n-k$。

选择一圈 $C = c_1 c_2 \cdots c_p c_1$ 满足下列条件:

(1) $p \leqslant n-k$;

(2) 在 (1)的条件下, C 尽可能长。

令 $R_1 = \langle G - V(C)\rangle$, 则 $|R_1| = n-p \geqslant k$。若 $|R_1| = k$ 且 R_1 中有一边, 连同 C 可得到 G 的一个剖分。当 $|R_1| = k$ 且 R_1 是独立集, 由 C 的最大性, R_1 中所有顶点在 C 中无相邻的邻点, 因此 $\sigma'_2(G) \leqslant \frac{p}{2}$, 但 $\frac{p}{2} \geqslant$

$\sigma'_2(G)\geqslant\frac{n-k+1}{2}$,即有 $p\geqslant n-k+1$。事实上,$p\leqslant n-k$,矛盾。于是不失一般性,假设 $|R_1|\geqslant k+1$,从而 $p\leqslant n-k-1$。

由 C 的最大性,显然 R_1 中每个顶点 w 在 C 中没有两个相邻的邻点,因此 $|N_C(w)|\leqslant\frac{p}{2}$。如果 $\sigma'_2(R_1)\geqslant\frac{|R_1|-(k-1)+1}{2}$,根据归纳假设,$R_1$ 能剖分成 $k-1$个同构于圈或路的子图。再加上 C,得到 G 的剖分。如果 $\sigma'_2(R_1)<\frac{|R_1|-(k-1)+1}{2}$,则 R_1 中存在一对相邻的顶点 u_1 和 u_2,使 $\max\{d_{R_1}(u_1), d_{R_1}(u_2)\}\leqslant\frac{|R_1|-(k-1)}{2}$,$\max\{d_C(u_1), d_C(u_2)\}\geqslant\frac{p}{2}$。

另一方面,由 $d_C(u_1)\leqslant\frac{p}{2}$,$d_C(u_2)\leqslant\frac{p}{2}$,说明 p为偶数$(p\geqslant 4)$且 $\max\{d_C(u_1), d_C(u_2)\}=\frac{p}{2}$。不失一般性,设 $d_C(u_1)=\frac{p}{2}$。

设 $N(u_1)\cap C=\{c_1, c_3, c_5, \cdots, c_{p-1}\}$,令 $H=\{w\in R_1 | N(w)\cap C=\{c_1, c_3, c_5, \cdots, c_{p-1}\}\}$,$R_2=R_1-H$。

接下来考虑生成子图 R_2,$|R_2|=|R_1|-|H|\geqslant k+1-|H|$。如果 R_2 中存在一对顶点 u_3 和 u_4,使得 $\max\{d_{R_2}(u_3), d_{R_2}(u_4)\}\leqslant\frac{|R_2|-(k-1-|H|)}{2}=\frac{n-p-k+1}{2}$,则 $\max\left\{d_{C\cup H}(u_3), d_{C\cup H}(u_4)\right\}\geqslant\sigma'_2(G)-\frac{n-p-k+1}{2}=\frac{p}{2}\geqslant 2$。

根据断言 2能够推断 $N(u_3)\cap C=\{c_1, c_3, c_5, \cdots, c_{p-1}\}$或 $N(u_4)\cap C=\{c_1, c_3, c_5, \cdots, c_{p-1}\}$,这与 H 的定义矛盾。从而必有 $\sigma'_2(R_2)\geqslant\frac{|R_2|-(k-1-|H|)+1}{2}$。

假设 $|H|=k-1$。因为 $\sigma'_2(R_2)\geqslant\frac{|R_2|-2+3}{2}=\frac{|R_2|+1}{2}$,由注释 4,$R_2$ 能被剖分成两个子图 R_{21}和 R_{22}同构于圈或 K_2 或 K_1。另一方面,H 中必有一顶点 u 且 u 在 R_2 中至少有一邻点 v,否则,对任意 $v_1, v_2\in H$,$\max\{d_G(v_1), d_G(v_2)\}=\max\{d_C(v_1), d_C(v_2)\}=\frac{p}{2}<\frac{n-k+1}{2}$,这与 $\sigma'_2(R_2)\geqslant\frac{n-k+1}{2}$矛盾。不妨令 $v\in R_{21}$,无论 R_{21}是圈或 K_1 或 K_2,都能得到 R_{21}中以 v 为端点的 Hamilton 路 Q,所以 G 能剖分成路 $c_pc_{p-1}\cdots c_1uvQ$ 和 R_{22}以及 $H-\{u\}$的所有顶点。

假设 $|H|=k-2$。根据归纳假设,R_2 能剖分成 $k-1-|H|$个同构于圈或路的子图,加上 C 及 H 中所有顶点,得到 G 的剖分。

定理 1得证。

3 定理 2的证明

定理 2 设 G 是一个顶点数为 n 的 2-连通图,k 为任意正整数且 $k\leqslant n$。

如果 $\sigma^*_2(G)=\min\{d_G(x)+d_G(y) \mid x, y\in V(G), x\neq y, d(x, y)=2\}\geqslant n-k$,则 G 剖分成 k 个子图 H_i,H_i 是圈或路,$1\leqslant i\leqslant k$。

证明 当 $\lambda\geqslant 4$,令 $\mathrm{A}_\lambda=\{G \mid G$ 是 2-连通的,$\forall u, v\in V(G), d(u, v)=2\Rightarrow\max\{d(u), d(v)\}\geqslant\frac{\lambda}{2}$,$\mathrm{B}_\lambda=\{G \mid G$ 是 2-连通的,$\forall u, v\in V(G), d(u, v)=2\Rightarrow d(u)+d(v)\geqslant\lambda\}$。

很明显,$\mathrm{A}_\lambda\supset\mathrm{B}_\lambda$。

下面证明定理 2。

当 $n=k$时, 显然成立。当 $n=k+1$时, G中至少有一条边, 结论也成立。当 $n=k+2$时, $\sigma_2^*(G)\geqslant 2$, G中有一条顶点数为 3的路, G剖分成一条路和 $n-3(=k-1)$个点。当 $n=k+3$时, $\sigma_2^*(G)\geqslant 3$, G中必有一条顶点为 4的路, G剖分成一条路和 $n-4(=k-1)$个点。因此, 假设 $n\geqslant k+4$。

在文献[4]中已经证明, 如果 $G\in A_\lambda$, 则 $c(G)\geqslant\lambda(4\leqslant\lambda\leqslant|V(G)|)$(这里 $c(G)$表示 G中最长圈的长度)。根据这个结论, 得到 $c(G)\geqslant n-k$。若 $c(G)=n-k$, 由 G是 2-连通图, 存在 $\omega\in V(G-C)$, 使得 ω在 c中有一邻点 v, 因此, G剖分成一条路和 $k-1$个点。若 $c(G)\geqslant n-k+1$, 设 $c(G)=p$, $C=v_1v_2\cdots v_p$, 则 $m=|V(G-C)|\leqslant n-n+k-1=k-1$, G可剖分成路 $v_1v_2\cdots v_{p-(k-1-m)}$和 $k-1$个点。

参考文献:

[1] Brandt S, Chen G, Faudree R, et al. Degree conditions for 2-factor[J]. J Graph Theory, 1997, 24(8): 165-173.

[2] Enomoto H, Li H. Partition of a graph into cycles and degenerated cycles[J]. Discrete Math, 2001, 160(6): 283-289.

[3] Chen L J. Partition of graphs into cysles and paths[J]. 南京师范大学学报: 自然科学版, 2003, 26(2): 6-9.

[4] Fan G H. New sufficient conditions for cycles in graphs[J]. J Combin Theory Ser B, 1984, 37(3): 221-227.