第 29卷第 4期
2006年 8月

南 京 气 象 学 院 学 报
Journal of Nanjing Institute of Meteorology

Vol. 29 No. 4
Aug. 2006

文章编号: 1000-2022(2006)04-0540-04

2n阶微分方程周期解的存在性

黄涛， 周伟灿
(南京信息工程大学 数学系,江苏 南京 210044)

摘 要: 考虑微分方程 $u^{(2n)} + \nabla G(u) = M(u)$ 解的存在性问题,运用同胚理论及不动点方法给出在 M 为有界全连续算子条件下此类方程解的存在性定理。

关键词: 同胚延拓; Banach空间; 全连续算子
中图分类号: O175.1 文献标识码: A

Existence of the Periodic Solution of Differential Equations of the 2n th Order

HUANG Tao, ZHOU Wei-can
(Department of Mathematics, NUIST, Nanjing 210044, China)

Abstract: For the 2nth order differential equation $u^{(2n)} + \nabla G(u) = M(u)$, under the condition of M being a bounded completely continuous operator, the existence of periodic solution is discussed by virtue of homeomorphism, and fixed point method.

Key words: diffeomorphism; Banach space; completely continuous operator

0 引言

考虑如下高阶 Duffing方程周期解的存在性

$$u^{(2n)} + \nabla G(u) = M(u)。\tag{1}$$

其中: $u \in R^n$, $G \in C^2(R^n, \mathbf{R})$, M 是有界全连续算子。

对于高阶 Duffing型方程一直是微分方程研究的热点[1-7]。在文献[1-3]中研究了标准的 $2n$阶 Duffing方程

$$u^{(2n)} + \sum_{j=1}^{n-1} a_j u^{2j} + (-1)^{n+1} f(t, u) = 0$$

在非共振与共振条件下的解的存在唯一性。

文献[7]研究了高阶亚线性 Duffing方程

$$u^{(2n)} + g(x) = p(t) = p(t+2\pi),$$
$$u^{(2n+1)} + g(x) = p(t) = p(t+2\pi)。$$

收稿日期: 2005-07-11; 改回日期: 2005-12-22

作者简介: 黄涛(1981-),男,湖南汨罗人,硕士,研究方向: 微分方程, E-mail: huangtao1981@etang.com;
周伟灿(通信作者),男,博士,教授, E-mail: zhwnim@nuist.edu.cn

的解的周期性。

文献[4]给出了

$$u^{(2n)}+\nabla G(u)=p(t)=p(t+2\pi)$$

的解的存在唯一性定理。本文所研究的是上述文献中所述方程更广的一类方程。研究这类问题,经常使用的工具是 Schauder不动点定理,通过构造一个先验界,从而得到解的存在性结论。本文利用同胚延拓和不动点方法在原有二阶 Duffing型方程周期解存在性研究的基础上进一步考虑高阶 Duffing型方程周期解的存在性。

其研究价值不仅仅在理论上,在实际应用中也有重要的价值,例如大气动力学模型[8-11]的研究有时可归结于 Duffing型方程的研究。

1 预备知识

记 $X=L_n^2[0,2\pi]=\{u(t)\mid u:[0,2\pi]\to R^n, u(t)=(u_i(t))_{n\times 1}, u_i\in L^2[0,2\pi]\}$。

定义内积,对 $\forall u,v\in X$,

$$(u,v)=\int_0^{2\pi}\langle u(t),v(t)\rangle\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{2\pi}u_i(t)v_i(t)\mathrm{d}t。\tag{2}$$

范数 $\|u\|=\sqrt{(u,v)}$,则 X 为 Hilbert空间。

设线性微分算子 $L:D(L)\to X, Lu=u^{(2n)}$ 及连续 Frechet可微算子 $N:D(L)\to X$, $(Nu)(t)=\nabla G(u(t))$。

记(1)式为

$$Lu+N(u)=M(u)。\tag{3}$$

设

$$D(L)=\{u\in X\mid u_i^{(2k-1)}(t)\text{在}[0,2]\text{上绝对连续}, u_i^{(2k)}(t)\in L^2[0,2\pi],$$
$$u_i^{(j)}(0)=u_i^{(j)}(2\pi),\quad i=1,2,\cdots,n, j=0,1,\cdots,2k-1\}。$$

则 L 在 $D(L)$上是稠定的自伴算子,事实上,对 $\forall u,v\in D(L)$,有

$$(Lu,v)=\int_0^{2\pi}\langle u^{(2n)},v\rangle\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{2\pi}u_i^{(2n)}(t)v_i(t)\mathrm{d}t=$$
$$\sum_{i=1}^{n}u_i^{(2n-1)}(t)v_i(t)\Big|_0^{2\pi}-\sum_{i=1}^{n}\int_0^{2\pi}u_i^{(2n-1)}(t)v'_i(t)\mathrm{d}t=$$
$$(-1)^1\sum_{i=1}^{n}\int_0^{2\pi}u_i^{(2n-1)}(t)v'_i(t)\mathrm{d}t=$$
$$(-1)^2\sum_{i=1}^{n}\int_0^{2\pi}u_i^{(2n-2)}(t)v''_i(t)\mathrm{d}t=\cdots=$$
$$(-1)^{2n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{2\pi}u_i(t)v_i^{(2n)}(t)\mathrm{d}t=(u,Lv)。$$

定义图范数 $\|\mid\cdot\mid\|:X\to\mathbf{R}$,

$$\|\mid u\mid\|=\|u\|+\|Lu\|=\|u\|+\|u^{(2n)}\|,$$

则 $D(L)$在图范数下是 Banach空间,由 Wirtinger's不等式

$$\|u^{(j)}\|^2\leqslant\|u^{(j+1)}\|^2,\qquad j=1,2,\cdots,2n-1。$$

可证明图范数跟 Sobolev范数 $\|u\|+\|u'\|+\|u''\|+\cdots+\|u^{(2n)}\|$ 是等价的。据 Sobolev嵌入定理 $D(L)$ 可嵌入 $C_n^{2n-1}[0,2\pi]$,其中:

$$C_n^{2n-1}[0,2\pi]=\{u:\mathbf{R}\to R^n\mid u_i\text{在}[0,2\pi]\text{有连续}(2n-1)\text{阶导数}\},$$

由于 $G(u)$有连续二阶偏导,则 N 是连续可微的,且有

$$(N'(u)v)(t)=\left(\frac{\partial^2G(u(t))}{\partial x_i\partial x_j}\right)v(t)=-\boldsymbol{Q}(u(t))v(t),\qquad(u,v\in D(L), t\in[0,2\pi])。$$

则 $\boldsymbol{Q}(u)$对 $\forall u\in R^n$ 是对称阵,且有

$$L+N'(u)=L-\boldsymbol{Q}(u)。$$

设 $\lambda_1(u),\lambda_2(u),\cdots,\lambda_n(u)$ 是 $\boldsymbol{Q}(u)$在 $u\in R^n$ 的特征值,记 $\lambda_1(u)\geqslant\lambda_2(u)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(u)$,如果存在正整数 $N_i(i=1,2,\cdots,n)$,有

$$\tau(N_i)=N_i^{2n}<\lambda_i(u)<(N_i+1)^{2n}=\tau(N_i+1),\quad i=1,2,\cdots,n。\tag{4}$$

考虑特征值问题

$$Lu-\boldsymbol{Q}(u_0)u=\gamma u。\tag{5}$$

其中: u_0 是 $D(L)$中的固定点, $\gamma=\tau(N)-\lambda_i(u_0),\ i=1,2,\cdots,n$。由(4)知零不是(5)的特征值[1],从而 $L-\boldsymbol{Q}(u_0)$ 是可逆的,由算子谱理论

$$\|(L-\boldsymbol{Q}(u_0))^{-1}\|=\max(\min\{\lambda_i(u_0)-\tau(N_i),\tau(N_i+1)-\lambda_i(u_0)\})^{-1}。\tag{6}$$

令 $\delta\ R_+\to R_+-\{0\}$

$$\delta(s)=\max_{\|u\|<s}\{(\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i(u_0)-\tau(N_i),\tau(N_i+1)-\lambda_i(u_0)\})^{-1}\},\tag{7}$$

则 $\delta(s)$是连续函数。

定义 1[12] 设 $r(t)$为下列常微分方程初值问题的解

$$\begin{cases}u'=g(t,u),\\ u(t_0)=u_0,\end{cases}\qquad t\in[t_0,t_0+a),\ a>0。\tag{8}$$

若方程(8)在 $[t_0,t_0+a)$存在任意解 $u(t)$,对 $\forall t\in[t_0,t_0+a)$满足: $u(t)\leqslant r(t)$,则称 $r(t)$为方程(8)的最大解。

引理 1[13] 设连续函数 $f:D\to F$,对任意 $q(t)=(1-t)y_0+ty_1,\ t\in[0,1]\subset f(D),\ \forall x_0\in f^{-1}(y_0)$,都 $\exists p:[0,1]\to D$ 有

$$p(0)=x_0,\qquad f(p(t))=q(t),\ t\in[0,1]。$$

则 $f:D\to F$ 是路线上升的。

引理 2[13] 设 $E=\{(t,u)\mid t,u\in\mathbf{R}\}\subset R^2,\ g\in C[E,\mathbf{R}]$,方程(8)最大解 $r(t)$的最大解区间为 $[t_0,t_0+a)$,设 $m\in C[(t_0,t_0+a),\mathbf{R}],\ (t,m(t))\in E$ (对 $\forall t\in[t_0,t_0+a)$), $m(t)\leqslant u_0$,且对一固定的迪尼导数有

$$Dm(t)\leqslant g(t,m(t)),\qquad t\in[t_0,t_0+a)-T。\tag{9}$$

其中: T 是区间 $[t_0,t_0+a)$上最多可数个迪尼不可导点集,则 $m(t)\leqslant r(t),\ t\in[t_0,t_0+a)$。

引理 3[14] 设 $G:R^n\to\mathbf{R}$ 有连续二阶偏导数,且 $Q(u)$的特征值满足(4),如果对 $\forall\eta\in\mathbf{R}$,初值问题

$$\begin{cases}y'(r)=\eta\delta(y(r)),\qquad r\in[0,1],\\ y(0)=0,\end{cases}\tag{10}$$

的最大解 y 定义在 $[0,1]$上且对 $\forall a\in(0,1]$,有 $y(a)=\lim\limits_{s\to a}y(s)$ 是有限的,则 $L+N$ 为 $D(L)$到 X 的同胚。

2 主要结论

定理 1 设 L,G 满足引理 3条件,若 $M:D(L)\to X$ 是一个有界全连续算子,则方程(3)至少有一解。

证明 由于 M 有界,故存在 $\eta>0$,使得对一切 $u\in D(L)$有 $\|M(u)\|\leqslant\eta$。

下证 $\|(L+N)^{-1}M(u)\|_{D(L)}$ 是有界的。

事实上对任给的 $v\in M(D(L))$有 $\|v\|_X\leqslant\eta$,据引理 3: $L+N$ 是 $D(L)$到 X 的同胚,因此存在一个 $p(0)\in D(L)$使得

$$(L+N)[p(0)]=0。$$

由引理 1,设 $q(s)=(1-s)0+sv\ (s\in[0,1])$, v为 X 中任意向量函数. 对 $\forall a\in(0,1]$, $\exists p:[0,a)\to D(L)$,使得

$$(L+N)[p(s)]=q(s)=sv,$$

则

$$[L+N'(p(s))][p'(s)]=v,$$

$$p'(s) = [L+N'(p(s))]^{-1}v,$$
$$\|p'(s)\| \leqslant \|[L+N'(p(s))]^{-1}\| \cdot \|v\|。$$

由(6)、(7)式得

$$\|p'(s)\| \leqslant \eta\delta(\|p(s)\|)。$$

由引理 2、3,令 γ是初值问题(8)的最大解,则 $\gamma(a) = \lim\limits_{s \to a}\gamma(s)$,对 $\forall a \in (0, 1]$, $p(a) = \lim\limits_{s \to a}p(s)$是有限的,所以 $\|p(s)\| \leqslant c$, $s \in [0, 1]$,即有 $\|(L+N)^{-1}M[p(s)]\| \leqslant c_1$ (c_1是与 c有关的常数),这对任意 $p(s) \in D(L)$均成立。

记 $B_R = \{u \in D(L), \| \, |u| \, \| \leqslant c_1\}$,则 $H \overset{\text{def}}{=} [L+N]^{-1}M$把 B_R映入 B_R,同时 $M: D(L) \to X$是一个全连续算子, $(L+N)^{-1}: X \to D(L)$是连续的,则 H是全连续算子,即连续紧算子,据 Schauder不动点定理可知 H至少有一个不动点 $u_0 \in B_R$使得 $Lu_0 + N(u_0) = M(u_0)$成立,则(1)式至少有一个解。

3　具体应用

考虑二阶 Duffing方程

$$u'' + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}u^2 + u & u\,e^{(-\sin 2t)} \\ u\,e^{(-\sin 2t)} & \frac{1}{2}u^2 - u \end{bmatrix} = 2\sin^2 t + 3\sin 2t。\tag{11}$$

设 $Lu = u''$,则 Lu是自伴算子。

令

$$Q(u) = -\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}u^2 + u & u\,e^{(-\sin 2t)} \\ u\,e^{(-\sin 2t)} & \frac{1}{2}u^2 - u \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} u-1 & -e^{(-\sin 2t)} \\ -e^{(-\sin 2t)} & -u+1 \end{bmatrix},$$

其特征值 $\lambda = 1 \pm \sqrt{1-(e^{(-\sin 2t)})^2}$,则 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 2$满足条件(4)。

显然 $f(t) = 2\sin^2 t + 3\sin 2t$是有界全连续算子,由结论定理 1,微分方程(11)至少有一个解。

参考文献:

[1] Zhu Jian. On the existence of periodic solutions of $2k$th order differential equations with resonance[J]. Journal of Nanjing University Mathematical Biquarterly, 2003, 20(1): 7-14.

[2] Cong Fuzhong. Periodic solutions for $2k$th order ordinary differential equations with nonresonance[J]. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 1998, 32(6): 787-793.

[3] 李臣顺,孙世全,李维国. 共振下 Duffing方程两点边值问题解的存在唯一性[J]. 聊城师院学报: 自然科学版, 2000, 13(2): 18-21.

[4] Li Yong, Wang Huaizhong. Periodic solutions of high order Duffing equations[J]. Applied Mathematics, 1991, 12(3): 407-412.

[5] 从福仲,史少云,黄庆道. 偶数阶微分方程的两点边值问题[J]. 数学年刊, 2000, 21A(5): 635-638.

[6] Li Weiguo. Periodic solutions of $2k$th order ordinary differential equations with resonance[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 259(1): 157-167.

[7] 杨作东. 高阶亚线性 Duffing方程的周期解[J]. 应用数学, 1995, 8(2): 211-216.

[8] 王永中,夏友龙. CISK影响下的线性和非线性惯性重力波[J]. 应用气象学报, 1996, 7(1): 82-88.

[9] 李崇银. 垂直切变基本气流中的 CISK[J]. 大气科学, 1983, 7(4): 427-431.

[10] 刘式适,刘式达. 层结切变流中惯性重力内波的非线性稳定性[J]. 气象学报, 1984, 42(1): 24-33.

[11] 李崇银. 环境流场对台风发生发展的影响[J]. 气象学报, 1983, 41(3): 275-283.

[12] Lakshmikantham V, Leeda S. Differential and Integral Inequalities[M]. New York: Academic Press, 1969.

[13] Marius R, Sorin R. Global inversion theorems and applications to differential equations[J]. Nonlinear Analysis, Theory Methods & Applications, 1980, 4(4): 951-965.

[14] 黄文华,曹菊生,沈祖和. 关于非线性两点边界值问题 $u''(t) + g(t, u) = f(t)$, $u(0) = u(2\pi) = 0$的解的存在性和唯一性[J]. 应用数学和力学, 1998, 19(9): 821-826.