

文章编号: 1000-2022(2006)04-0462-08

切变基流对赤道大气波动稳定性的作用

沈新勇^{1,2}, 赵南³, 何金海², 宇婧婧²

(1 南京信息工程大学 江苏省气象灾害重点实验室, 江苏 南京 210044

2 南京信息工程大学 大气科学系, 江苏 南京 210044 3 中国气象科学研究院, 北京 100081)

摘 要: 在赤道 β 平面近似条件下, 使用纬向切变基流下线性化 Boussinesq 方程组, 分析了在纬向切变基流下几种赤道大气波动的稳定性特征。研究表明, 基本气流的水平切变对赤道大气波动起到不稳定的作用, 但是对赤道大气 Kelvin 波的频率、稳定性以及传播的相速度并不起作用。基本气流的水平切变使得相对于基本气流向东传播的重力惯性内波相速度减慢, 而使得相对于基本气流向西传播的重力惯性内波的相速度加快, 却造成相对于基本气流向西传播的 Rossby 波相速度减慢。基本气流的水平切变对于赤道混合 Rossby-重力惯性内波的影响主要取决于纬向波数 k 值的范围大小。当纬向波数 k 值较小时, 基流的水平切变使得相对于基本气流向西传播的混合 Rossby-重力惯性内波相速度加快; 而当纬向波数 k 值较大时, 则使得相对于基本气流向西传播的混合 Rossby-重力惯性内波相速度减慢。在半地转近似下, 风速水平切变的存在, 会使得波长较大 (纬向波数 $k \rightarrow 0$) 的赤道 Rossby 波相对于基本气流向西传播的相速度减慢; 而风速垂直切变的存在, 必然会引起这种波长较大 ($k \rightarrow 0$) 的 Rossby 波出现不稳定增长, 同样也会造成赤道 Rossby 波相对于基本气流向西传播的相速度减慢。最后通过扰动发展能量方程, 说明了基本气流的水平切变和垂直切变可以为扰动的发展提供能量来源。

关键词: 切变基流; 赤道 Rossby 波; 混合 Rossby-重力惯性内波; 稳定性

中图分类号: P433 **文献标识码:** A

Effects of Shear Flow on the Stability of
Equatorial Atmospheric WavesSHEN Xin-yong^{1,2}, ZHAO Nan³, HE Jin-hai², YU Jing-jing²

(1. Jiangsu Key Laboratory of Meteorological Disaster, NUST, Nanjing 210044, China

2. Department of Atmospheric Sciences, NUST, Nanjing 210044, China

3. Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081, China)

Abstract By use of the linearized atmospheric equations of Boussinesq approximation on the equatorial β -plane in a zonal shear basic flow, study is undertaken of the stability features of several kinds of equatorial

收稿日期: 2005-07-29 改回日期: 2005-10-17

基金项目: 江苏省气象灾害重点实验室项目 (KLME050201); 国家重点基础研究发展规划项目 (2004CB418301); 江苏省自然科学基金项目 (BK2005141); 国家自然科学基金资助项目 (40275011, 90211011); 南京信息工程大学科研启动基金资助项目 (QD05)

作者简介: 沈新勇 (1964-), 男, 江苏兴化人, 副教授, 博士后, 研究方向: 季风动力学、中小尺度动力学及其数值模拟。

E-mail: shenxy@nuist.edu.cn; skyd@126.com

atmospheric waves. Results suggest that 1) the horizontal shear basic flow exerts unstable impact on these atmospheric waves but no effect on the stability and phase velocity of equatorial Kelvin waves; 2) the zonal shear decelerates (accelerates) the phase velocity of internal inertial gravity waves propagating eastward (westward) with respect to the basic flow but slows down the west-propagating phase velocity of Rossby waves; 3) the zonal shear of basic flow influences equatorial mixed Rossby–internal inertial gravity wave mainly through zonal wavenumber k , with smaller (larger) k responsible for the acceleration (deceleration) of the phase velocity of the mixed-type wave propagating westward with respect to basic flow; 4) under the semi-geostrophic approximation the horizontal wind shear leads to that the equatorial Rossby wave with a smaller zonal wavenumber ($k \rightarrow 0$) exhibits the deceleration of westward propagating phase velocity while in the presence of vertical wind shear, the unstable growth as well. Finally, through the analysis of the equation of energy we demonstrate that through horizontal and vertical shears, the basic flow furnishes the development of disturbances with energy.

Key words shear basic flow, equatorial Rossby wave, mixed Rossby–internal inertial gravity wave, stability

0 引言

自从 Matsuno^[1]首先运用赤道 β 平面近似下的浅水模式得到低纬大气中存在 Kelvin 波以及混合 Rossby–重力波的结论以来, 许多科学家对于热带大气动力学特别是热带大气波动理论做出了重要的研究。考虑到低纬地区赤道附近存在明显的东风切变, 许多学者采用数值差分计算方法研究了基本气流经向水平切变对热带大尺度运动特别是对赤道 Rossby 波的作用^[2-5]。事实上, 当背景大气处于静止时, 低纬赤道附近的特征波动完全可以用解析方法求出^[1]。但是当大气的基本状态不是静止, 并且存在明显的风速水平切变和垂直切变时, 要得到完全的解析解就比较困难。我国学者周紫东等^[6]在南北方向采用传统的差分方法, 对赤道地区正压大气的特征波动进行数值求解。赵强等^[7]建立一个简单的斜压大气半地转模式, 研究了基本位温场经向非均匀分布以及基本气流垂直切变对赤道纬向超长尺度 Rossby 波动的影响, 指出基本位温场经向温差必然要有基本气流垂直切变与之相匹配, 而基本气流垂直切变将导致赤道长 Rossby 波动不稳定并影响其纬向传播速度。李崇银^[8]引入了基本气流垂直切变的 CISK (conditional instability of second kind) 模式, 得到了一种缓慢移动的 CISK 波, 这种 CISK 波向北的经向速度约为 0.6° lat/d , 振荡周期约为 34 d, 它极有可能是南亚夏季风槽脊和热带气旋活动的重要驱动机制。李丽平等^[9]系统地总结了热带大气季节内振荡 (MJO) 的动力学机制, 其中积云对流加热激发的 CISK–Kelvin 波和 CISK–Rossby 波可以较好地解释 MJO 的传播。

本文采用赤道 β 平面上满足静力平衡的 Boussinesq 近似方程组, 考虑基本气流的水平切变和垂直切变, 讨论这种基流切变对赤道 Rossby 波、重力惯性内波以及混合 Rossby–重力惯性内波稳定性的作用, 以及对这几种波动传播相速度的影响, 并给出基流切变下的这些波动结构的物理特征。

1 水平切变基流下赤道大气波动的稳定性特征

采用如下的线性化的赤道 β 平面上满足静力平衡的 Boussinesq 近似方程组, 注意这里同时考虑了基本气流的水平切变以及垂直切变。取沿纬圈平均的物理量场为基本场, 这样平均位温 $\bar{\theta}$ 以及平均纬向风场 $\bar{u}$ 只是 y 和 z 的函数, 定义静力稳定度参数 $N^2 = -\frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$ (一般取 $N^2 > 0$, 表示层结稳定), 斜压稳定度参数 $S^2 = -\frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} = \beta_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$, 则有:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right] u' - \beta_y v' = -\frac{\partial \phi'}{\partial x} - v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial y} \right) v' + \beta_y u' = - \frac{\partial \phi'}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial z} = \frac{\theta'}{\theta} g, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\theta'}{\theta} g \right) = S^2 v' - N^2 w'. \quad (5)$$

其中: $\phi' = p' / \rho$, p' 为相对于背景大气的气压偏差, ρ 为背景大气的密度。公式 (1) ~ (5) 就是本文所要讨论的扰动出发方程组, 将 (3) 式代入到 (5) 式中, 消去扰动位温 θ' , 得到如下方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial \phi'}{\partial z} = \beta \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} v' - N^2 w'. \quad (6)$$

对于该方程组 (1)、(2)、(4) 和 (6) 式, 此处假定在 $(y, z) = (0, 0)$ 处的基本气流为 $\bar{U}_0$, 空间任意处的基本气流为 $\bar{U} = \bar{U}_0 \left[1 + \varepsilon_1 \frac{y}{L} + \varepsilon_2 \frac{z}{H} \right]$, L 为扰动在南北方向上的影响宽度 (由于低纬赤道附近的扰动离开赤道向两极方向会衰减, 通常把扰动振幅衰减为赤道上振幅的 e^{-1} 倍的宽度定义为影响宽度, 通常扰动的水平宽度在赤道附近的 20 个纬度范围内), H 为扰动在垂直方向上的影响高度, $|\varepsilon_1| \ll 1$, $|\varepsilon_2| \ll 1$, 这里 $\varepsilon_1 = \frac{L}{U_0} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y}$, $\varepsilon_2 = \frac{H}{U_0} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z}$, 都是常数, 它们的量级可以都取为 10^{-1} , 这样的条件表示背景流场的风速水平切变和垂直切变都很小。取沿纬向 x 方向和垂直方向传播的波动解 $u' = U_*(y) e^{i(kx + mz - \omega t)}$, $v' = V_*(y) e^{i(kx + mz - \omega t)}$, $w' = W_*(y) e^{i(kx + mz - \omega t)}$, $\phi' = \Phi_*(y) e^{i(kx + mz - \omega t)}$, 代入到上述扰动方程组中。在前面的假定条件下, 由于 $\frac{y}{L} \ll 1$, $\frac{z}{H} \ll 1$, 该方程组左端含有 $(-i\omega + k\bar{U})$ 项的一个极好近似是略去含有 ε_1 以及 ε_2 的项, 因而可以近似地表示为 $(-i\omega + k\bar{U}_0)$ 。该方程组可以近似地处理为如下的常微分方程组。

$$(-i\omega + k\bar{U}_0) U_* - \beta_y V_* = -k\Phi_* - \varepsilon_1 \frac{\bar{U}_0}{L} V_* - \varepsilon_2 \frac{\bar{U}_0}{H} W_*, \quad (7)$$

$$(-i\omega + k\bar{U}_0) V_* + \beta_y U_* = -\frac{d\Phi_*}{dy}, \quad (8)$$

$$kU_* + \frac{dW_*}{dy} + mW_* = 0 \quad (9)$$

$$(-i\omega + k\bar{U}_0)(m\Phi_*) = \varepsilon_2 \beta \frac{\bar{U}_0}{H} y V_* - N^2 W_*. \quad (10)$$

定义 $\omega_* = \omega - k\bar{U}_0$, 从方程 (9) 中解出 W_* , 代入到 (7) 和 (10) 式中, 得到关于 U_* 和 Φ_* 的方程组:

$$\left(-i\omega_* - \varepsilon_2 \frac{k}{m} \frac{\bar{U}_0}{H} \right) U_* + k\Phi_* = \left(\beta_y - \varepsilon_1 \frac{\bar{U}_0}{L} \right) V_* - \frac{i\varepsilon_2 \bar{U}_0}{m} \frac{dV_*}{dy}, \quad (11)$$

$$- \frac{k}{m} N^2 U_* + m\omega_* \Phi_* = \varepsilon_2 \beta \frac{\bar{U}_0}{H} y V_* - \frac{i}{m} N^2 \frac{dV_*}{dy}. \quad (12)$$

从以上两式中解出 U_* 和 Φ_* , 得到 U_* 和 Φ_* 的函数表达式:

$$U_* = \frac{\mu_1 \frac{dV_*}{dy} + (\mu_2 y + \mu_3) V_*}{\mu_7}, \quad (13)$$

$$\Phi_* = \frac{\mu_4 \frac{dV_*}{dy} + (\mu_5 y + \mu_6) V_*}{\mu_7}. \quad (14)$$

其中: $\mu_1 = -i\varepsilon_2 \omega_* \frac{\bar{U}_0}{H} - \frac{k}{m} N^2$, $\mu_2 = \beta \left[m\omega_* - i\varepsilon_2 k \frac{\bar{U}_0}{H} \right]$, $\mu_3 = -\varepsilon_1 m\omega_* \frac{\bar{U}_0}{L}$, $\mu_4 = -\frac{N^2}{m} \omega_*$, $\mu_5 =$

$$- \beta \left[i \varepsilon_2 \omega_* \frac{\bar{U}_0}{H} - \frac{k}{m} N^2 + \varepsilon_2^2 \frac{k}{m} \frac{\bar{U}_0^2}{H^2} \right], \mu_6 = - \varepsilon_1 \frac{k}{m} N^2 \frac{\bar{U}_0}{L}, \mu_7 = - i n \left[\omega_*^2 - \frac{k^2}{m^2} N^2 - i \varepsilon_2 \omega_* \frac{k}{m} \frac{\bar{U}_0}{H} \right].$$

再将 (13) 和 (14) 式代入到 (8) 式中, 就可以获得关于单一变量 V_* 的常微分方程:

$$\mu_4 \frac{d^2 V_*}{dy^2} + [(\mu_5 + \beta \mu_1)y + \mu_6] \frac{dV_*}{dy} + (\beta \mu_2 y^2 + \beta \mu_3 y + \mu_5 - \mu_7 \omega_*) V_* = 0 \quad (15)$$

定义 $\alpha_1 = \frac{\mu_5 + \beta \mu_1}{\mu_4}$, $\alpha_2 = \frac{\mu_6}{\mu_4}$, $\gamma_1 = \frac{\beta \mu_2}{\mu_4}$, $\gamma_2 = \frac{\beta \mu_3}{\mu_4}$, $\gamma_3 = \frac{\mu_5 - \mu_7 \omega_*}{\mu_4}$, 并对该常微分方程做函数变换

$V_*(y) = V_*(y) e^{-\frac{\alpha_1 y^2}{4} - \frac{\alpha_2 y}{2}}$, 则得到关于 $V_*(y)$ 的微分方程:

$$\frac{d^2 V_*}{dy^2} + \left[\left(\gamma_1 - \frac{\alpha_1}{4} \right) y^2 + \left(\gamma_2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2} \right) y + \gamma_3 - \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2^2}{4} \right] V_* = 0 \quad (16)$$

记 $a = \gamma_1 - \frac{\alpha_1}{4}$, $b = \gamma_2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2}$, $c = \gamma_3 - \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2^2}{4}$, 可以将方程 (16) 化为如下形式

$$\frac{d^2 V_*}{dy^2} + \left[\frac{4ac - b^2}{4a} + a \left(y + \frac{b}{2a} \right)^2 \right] V_* = 0 \quad (17)$$

对方程做自变量变换 $\xi = \left(-\frac{1}{a} \right)^{-\frac{1}{4}} \left(y + \frac{b}{2a} \right)$, 则方程 (17) 变换成如下的标准形:

$$\frac{d^2 V_*}{d\xi^2} + \left[\left(-\frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{4ac - b^2}{4a} - \xi^2 \right] V_* = 0 \quad (18)$$

特别是在只考虑基本气流的水平切变时, 基本气流仅仅是 y 的函数, 即 $\bar{U} = \bar{U}(y)$, $\varepsilon_2 = 0$ 。此时, 参数 μ_1 , $\mu_2, \dots, \mu_6$ 以及参数 $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, a, b, c$ 都是实数。考虑到扰动在无穷远处衰减为零, 该方程的边界条件

可以取为 $V_* \Big|_{\xi \rightarrow \pm \infty} = 0$ 。方程 (18) 在该齐次边界条件下要有非零解的条件是方括号中的前一项必须为奇整数 ($2n+1, n=0, 1, 2, \dots$), 再代入各个参数 ($a, b, c, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7$ 和 ε_1) 的表达式中, 即可得到水平切变基流中赤道大气波动的频散关系

$$\omega_*^4 + \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right)^2 - k^2 \frac{N^2}{m^2} - (2n+1) \beta \frac{N}{m} \right] \omega_*^2 - k \beta \frac{N^2}{m^2} \omega_* - \frac{k^2 N^2}{4m^2} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (19)$$

注意到上式中 $\omega_* = \omega - k \bar{U}_0$, 对于给定的垂直方向上波数 m 以及不同的 n ($n=0, 1, 2, \dots$), 上式给出了频率 ω 和纬向波数 k 之间的关系。通过在 (19) 式中取一个特例, 让层结稳定度 $N^2 = 0$, 即为中性层结, 此时波动频率将会出现虚数, 亦即波动会不稳定增长, 风速的水平切变对赤道大气波动起到不稳定的作用。此外, 在 (19) 式中取纬向波数 $k=0$, 可以得到纬向对称天气系统发生不稳定时的判据条件, 亦即风的水平切变必须要大于某一个临界值, 该临界值与垂直波数 m 、经向波数 n 、 β 因子以及层结稳定度 N^2 等参数有关。

考虑到风速的水平切变是很小的情况, 注意到 (19) 式中有风速的水平切变平方项, 定义小参数 $\varepsilon = \varepsilon_1^2 = \left[\frac{L}{\bar{U}_0} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right]^2$ 。将波动的频率 ω 按照小参数 ε 进行展开, 并且只取到 $O(\varepsilon)$ 项, 即 $\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1$, $\omega_* = \omega_0 - k \bar{U}_0 + \varepsilon \omega_1$, 代入 (19) 式中, 比较所有含有 ε^0 和 ε^1 的项, 可以得到 $O(\varepsilon^0)$ 以及 $O(\varepsilon^1)$ 的各阶近似方程。

$O(\varepsilon^0)$ 近似方程 (没有风速切变) 为

$$(\omega_0 - k \bar{U}_0)^3 - \left[k^2 \frac{N^2}{m^2} + (2n+1) \beta \frac{N}{m} \right] (\omega_0 - k \bar{U}_0) - k \beta \frac{N^2}{m^2} = 0 \quad (20)$$

$O(\varepsilon^1)$ 近似方程为

$$4(\omega_0 - k \bar{U}_0)^2 \omega_1 - 2(\omega_0 - k \bar{U}_0) \left[k^2 \frac{N^2}{m^2} + (2n+1) \beta \frac{N}{m} \right] \omega_1 - k \beta \frac{N^2}{m^2} \omega_1 + \frac{1}{4} (\omega_0 - k \bar{U}_0)^2 \frac{\bar{U}_0^2}{L^2} - \frac{k^2 N^2}{4m^2} \frac{\bar{U}_0^2}{L^2} = 0 \quad (21)$$

将 (20) 式运用到 (21) 式中, 可以求得 ω_1 的解, 并且可以最终求得频率 ω 解的近似表达式:

$$\omega = \omega_0 - \frac{1}{4} \frac{(\omega_0 - k\bar{U}_0)^2 - \frac{k^2 N^2}{m^2}}{2(\omega_0 - k\bar{U}_0)^2 + k\beta \frac{N^2}{m}} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right)^2. \quad (22)$$

下面对不同的 n 值加以讨论。

(1) 当 $n \geq 1$ 时, 零级近似频率方程 (20) 式中共有 3 个根, 其中两个根分别对应于相对于基本气流向东传播和向西传播的重力惯性内波, 第 3 个根对应于相对于基本气流向西传播的 Rossby 波。这 3 个根的近似表达式为

$$(\omega_0)_{1,2} \approx k\bar{U}_0 \pm \sqrt{k^2 \frac{N^2}{m^2} + (2n+1)\beta \frac{N}{m}}, \quad (23)$$

$$(\omega_0)_3 \approx k\bar{U}_0 - k\beta \frac{N^2}{m} \left[k^2 \frac{N^2}{m^2} + (2n+1)\beta \frac{N}{m} \right]^{-1}. \quad (24)$$

将 (23) 代入到 (22) 式中, 可见由于风速水平切变的存在, (22) 式中右端的后面一项小于零, 使得相对于基本气流向东传播和向西传播的重力惯性内波频率 ω 都要减小, 这时相对于基本气流向东传播的重力惯性内波相速度就要减慢, 而相对于基本气流向西传播的重力惯性内波的相速度就要加快 (亦即相速度相对于基本气流的绝对值要增大)。将 (24) 式代入到 (22) 式中, 可见 (22) 式中右端的后面一项大于零, 使得相对于基本气流向西传播的 Rossby 波频率要增大, 从而使得这种相对于基本气流向西传播的 Rossby 波相速度减慢 (亦即相速度相对于基本气流的绝对值要减小)。

(2) 当 $n = 0$ 时, 零级近似频率方程 (20) 中具有 2 个有物理意义的根:

$$(\omega_0)_1 = k\bar{U}_0 + \frac{kN}{2n} + \sqrt{\left(\frac{kN}{2n} \right)^2 + \beta \frac{N}{m}}, \quad (25)$$

$$(\omega_0)_2 = k\bar{U}_0 + \frac{kN}{2n} - \sqrt{\left(\frac{kN}{2n} \right)^2 + \beta \frac{N}{m}}. \quad (26)$$

其中: $(\omega_0)_1$ 表示相对于基本气流向东传播的高频重力惯性内波的频率, $(\omega_0)_2$ 称为相对于基本气流西传的混合 Rossby 重力惯性内波。

将 (25) 代入到 (22) 式中, 可见由于风速水平切变的存在, (22) 式中右端的后面一项小于零, 使得这种 $n = 0$ 时的相对于基本气流向东传播的高频重力惯性内波频率 ω 减少, 亦即这种相对于基本气流向东传播的高频重力惯性内波相速度就要减慢。

将 (26) 式代入到 (22) 式中, 可见在纬向波数 k 值较小时, $(\omega_0)_2$ 主要表现为相对于基本气流西传的重力惯性内波的特性, 这时 (22) 式右端的后面一项小于零, 这种相对于基本气流向西传播的混合 Rossby 重力惯性内波频率 ω 要减小, 从而它的相速度就要加快 (亦即相速度相对于基本气流的绝对值要增大)。而当纬向波数 k 值较大时, $(\omega_0)_2$ 主要表现为相对于基本气流西传的 Rossby 波的特性, 这时 (22) 式右端的后面一项大于零, 使得这种相对于基本气流向西传播的混合 Rossby 重力惯性内波频率增大, 从而使得这种波动相速度减慢 (亦即相速度相对于基本气流的绝对值要减小)。

(3) 第 3 种情形是对 $n = -1$ 而言的。在零级近似频率方程 (20) 式中取 $n = -1$, 则可以求得一个具有物理意义的解 $\omega_0 = k\bar{U}_0 + kN/m$, 它表示的是实际大气中相对于基本气流向东传播的 Kelvin 波。再代入到 (22) 式中, 可以发现 (22) 式的右端后面一项为零, 说明基本气流的水平切变对赤道 Kelvin 波的频率或者稳定性并不起作用。

2 半地转近似下切变基流对赤道 Rossby 波的作用

对赤道 β 平面上的低纬大气动力学方程组 (1) ~ (5) 采用半地转近似, 即略去方程 (2) 左端的第 1 项, 这时方程组 (1) ~ (5) 中可以滤去相对高频的重力惯性内波, 而保留波长较大的相对低频的低纬 Rossby 波以及 Kelvin 波。在此半地转近似的假定下, 定义参数 γ_3 就变为 μ_3/μ_4 。按照前文同样的方法, 获得各个参数

的表达式, 最终可得到半地转近似下切变基流中赤道大气波动的频散关系, 现在分两种情况来讨论。

(1) 在只考虑基本气流的水平切变时, 基本气流仅仅是 y 的函数, 即 $\bar{U} = \bar{U}(y)$, 此时参数 α_1 为零, 则得到水平切变基流中赤道大气波动的频散关系为

$$\left[(2n+1)\beta\frac{N}{m} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial y}\right)^2 \right] \omega_*^2 + k\beta\frac{N^2}{m^2}\omega_* + \frac{k^2N^2}{4m^2}\left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad (27)$$

式中有风速的水平切变平方项, 同样定义小参数 $\varepsilon = \varepsilon_1 = \left(\frac{L}{U_0}\frac{\partial\bar{U}}{\partial y}\right)^2$ 。将波动的频率 ω 按照小参数 ε 进行展开, 并且只取到 $O(\varepsilon)$ 项, 即 $\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1$, $\omega_* = \omega_0 - k\bar{U}_0 + \varepsilon\omega_1$, 代入到 (35) 式中, 比较所有含有 ε^0 和 ε^1 的项, 可以得到 $O(\varepsilon^0)$ 以及 $O(\varepsilon^1)$ 的各阶近似方程。

$O(\varepsilon^0)$ 近似方程 (没有风速切变的情况) 为

$$(2n+1)\beta\frac{N}{m}(\omega_0 - k\bar{U}_0) + k\beta\frac{N^2}{m^2} = 0 \quad (28)$$

$O(\varepsilon^1)$ 近似方程为

$$2(2n+1)\beta\frac{N}{m}(\omega_0 - k\bar{U}_0)\omega_1 + k\beta\frac{N^2}{m^2}\omega_1 - \frac{1}{4}(\omega_0 - k\bar{U}_0)^2\frac{\bar{U}_0^2}{L^2} + \frac{k^2N^2}{4m^2}\frac{\bar{U}_0^2}{L^2} = 0 \quad (29)$$

将 (28) 式运用到 (29) 式中, 可以求得 ω_1 的解, 并且可以最终求得频率 ω 解的近似表达式

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{4}\frac{(\omega_0 - k\bar{U}_0)^2 - \frac{k^2N^2}{m^2}}{(2n+1)\beta\frac{N}{m}(\omega_0 - k\bar{U}_0)}\left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial y}\right)^2 \quad (30)$$

从零级近似方程 (28) 式中得到半地转近似下水平切变基流中 Rossby 波的零级近似频率表达式

$$\omega_0 = k\bar{U}_0 - k\beta\frac{N^2}{m^2}\left[(2n+1)\beta\frac{N}{m}\right]^{-1} \quad (31)$$

将该式与 (24) 式相比较发现, 上式表示的是水平切变基流中相对于基本气流向西传播的波长较大 ($k \rightarrow 0$) 的 Rossby 波频率关系式。再将 (31) 式代入到 (30) 式中, 可以发现 (30) 式右端后面的一项大于零。这说明由于风速水平切变的存在, 会使得该波长较大的赤道 Rossby 波相对于基本气流向西传播的相速度减慢。

(2) 在只考虑基本气流的垂直切变时, 基本气流仅仅是 z 的函数, 即 $\bar{U} = \bar{U}(z)$, 此时参数 $\mu_3, \mu_6, \alpha_3, \gamma_3, b$ 都为零, 则得到垂直切变基流中赤道大气波动的频散关系

$$\frac{m^2}{k^2N^2}\left(1 - \frac{1}{Ri}\right)\omega_*^2 - \frac{m}{kN^2}\frac{\partial\bar{U}}{\partial z}\left(1 - \frac{1}{Ri}\right)\omega_* - \frac{1}{(2n+1)^2}\left(1 - \frac{1}{2Ri}\right)^2 + \frac{1}{4Ri^2} = 0 \quad (32)$$

这里 $Ri = N^2\left\{\left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial z}\right)^2\right\}$ 是 Richardson 数。

在 (32) 式中取风速的垂直切变为零, 则会得到半地转近似下基流为常数时的赤道 Rossby 波频率

$$\omega = k\bar{U}_0 - k\beta\frac{N^2}{m^2}\left[(2n+1)\beta\frac{N}{m}\right]^{-1} \quad (33)$$

在 (32) 式中, 第 2 项出现虚数, 该方程的解 ω 必然也会出现虚部。换句话说, 由于风速垂直切变的存在, 必然会导致赤道 Rossby 波的频率出现虚部, 从而引起这种波长较大 ($k \rightarrow 0$) 的 Rossby 波出现不稳定增长。

当考虑风速的垂直切变充分小时, 定义小参数 $\varepsilon = \varepsilon_2 = \frac{H}{U_0}\frac{\partial\bar{U}}{\partial z}$ 。将波动的频率 ω 按照小参数 ε 进行展开, 并且只取到 $O(\varepsilon)$ 项, 即 $\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1$, $\omega_* = \omega_0 - k\bar{U}_0 + \varepsilon\omega_1$, 代入到 (32) 式中, 比较所有含有 ε^0 和 ε^1 的项, 可以得到 $O(\varepsilon^0)$ 、 $O(\varepsilon^1)$ 以及 $O(\varepsilon^2)$ 的各阶近似方程。

$O(\varepsilon^0)$ 近似方程 (没有风速切变的情况) 为

$$\frac{m^2}{k^2N^2}(\omega_0 - k\bar{U}_0)^2 - \frac{1}{(2n+1)^2} = 0 \quad (34)$$

$O(\varepsilon^1)$ 近似方程为

$$\frac{m^2}{k^2 N^2} [2\omega_1 (\omega_0 - k\bar{U}_0)] - \frac{im}{kN^2} \frac{\bar{U}_0}{H} (\omega_0 - k\bar{U}_0) = 0 \quad (35)$$

$O(\varepsilon^2)$ 近似方程为

$$\frac{m^2}{k^2 N^2} \left[2\omega_2 (\omega_0 - k\bar{U}_0) + \omega_1^2 - \frac{\bar{U}_0^2}{N^2 H^2} (\omega_0 - k\bar{U}_0)^2 \right] - \frac{im}{kN^2} \frac{\bar{U}_0}{H} \omega_1 + \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{\bar{U}_0^2}{N^2 H^2} = 0 \quad (36)$$

从零级近似方程 (34) 式可以得到半地转近似下切变基流中 Rossby 波的零级近似频率

$$\omega_0 = k\bar{U}_0 - \frac{1}{2n+1} \frac{kN}{m} \quad (37)$$

将 (37) 式代入到 $O(\varepsilon^1)$ 近似方程 (35) 式中, 可以获得半地转近似下垂直切变基流中 Rossby 波的一级近似频率

$$\omega_1 = \frac{i}{2} \frac{k\bar{U}_0}{mH} \quad (38)$$

再将 (37) 和 (38) 式代入到 $O(\varepsilon^2)$ 近似方程 (36) 式中, 则得到 Rossby 波的二级近似频率表达式

$$\omega_2 = \frac{2n+1}{8} \frac{k}{mN} \frac{\bar{U}_0^2}{H^2} \quad (39)$$

最后综合 (37)、(38) 和 (39) 式, 可以获得频率 ω 解的近似表达式

$$\omega \approx \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 \approx \omega_0 + \frac{k}{2n} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{2n+1}{8} \frac{k}{mN} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right)^2 \quad (40)$$

上式表示的是半地转近似下垂直切变基流中相对于基本气流向西传播的波长较大 ($k \rightarrow 0$) 的 Rossby 波频率关系式。分析此式可以发现, 由于 ω_1 为虚数, 说明由于风速垂直切变的存在, 会使得这种波长较大的赤道 Rossby 波增长或者衰减。当纬向基本气流随高度而增大时 ($\bar{U}_z > 0$), 赤道 Rossby 波会随时间而发展增长; 当纬向基本气流随高度而减少时 ($\bar{U}_z < 0$), 赤道 Rossby 波会随时间而衰减。此外, 由于 ω_2 恒大于零, 说明基本气流的垂直切变会使得赤道 Rossby 波相对于基本气流向西传播的相速度减慢。

3 切变基流中赤道大气波动的涡度、散度及其能量方程

在方程 (1)、(2) 中, 定义水平扰动涡度 $\zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}$ 和水平扰动散度 $D' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}$, 从而可以得到切变基流中赤道大气波动的涡度方程和散度方程:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial y} \right) \zeta' = - \left(\beta_y - \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) D' - \beta_v' + \frac{\partial v'}{\partial y} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + v' \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + w' \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial z} \quad (41)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial y} \right) D' = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi' + \beta_y \zeta' - \beta_u' - 2 \frac{\partial v'}{\partial x} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - \frac{\partial w'}{\partial x} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \quad (42)$$

从 (41) 式可以看出, 扰动涡度随时间的局地变化主要取决于平均纬向风场对扰动涡度的平流作用、扰动散度的旋转效应项以及 β 作用项。(41) 式右端的最后 3 项体现了背景场与扰动场的相互作用, 通过背景场风速的水平切变以及垂直切变造成扰动涡度随时间的变化。

从 (42) 式可以看出, 水平扰动散度随时间的局地变化主要取决于平均纬向风场对扰动散度的平流作用、扰动气压场的强度、水平扰动涡度的旋转效应以及 β 作用项。(42) 式右端的最后两项体现了背景场与扰动场的相互作用, 通过背景场风速的水平切变以及垂直切变造成扰动散度随时间的变化。

通过扰动方程组 (1) ~ (5) 式, 可以得到扰动发展的能量方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[\frac{1}{2} (u'^2 + v'^2) \right] = -u' \frac{\partial \phi'}{\partial x} - v' \frac{\partial \phi'}{\partial y} - w' \frac{\partial \phi'}{\partial z} + \frac{g}{\theta} w' \theta' - u' v' \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - u' w' \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \quad (43)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[\frac{1}{2N^2} \left(\frac{\theta'}{\theta} g \right)^2 \right] = - \frac{g}{\theta} w' \theta' + \frac{gS^2}{\theta V^2} v' \theta' \quad (44)$$

将上述能量方程在 (x, y, z) 空间内的一个区域 Σ 内进行积分, 取该区域的边界为固定边界, 并且应用扰动连续方程, 定义扰动水平动能 $K' = \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2)$, 扰动有效位能 $P' = \frac{1}{2N^2} \left(\frac{\theta'}{\theta} g \right)^2$, 可以得到:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint' d\Sigma = \iint_{\theta}^{\theta_0} w' \theta' d\Sigma - \iint u' v' \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + u' w' \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} d\Sigma - \iint \frac{\partial K'}{\partial x} d\Sigma \quad (45)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint' d\Sigma = - \iint_{\theta}^{\theta_0} w' \theta' d\Sigma + \iint_{\theta}^{\theta_0} \frac{S^2}{2} v' \theta' d\Sigma - \iint \frac{\partial P'}{\partial x} d\Sigma \quad (46)$$

将上面两式相加, 得到扰动发展的总能量方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint (K' + P') d\Sigma = \iint_{\theta}^{\theta_0} \frac{S^2}{2} v' \theta' d\Sigma - \iint u' v' \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + u' w' \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} d\Sigma - \iint \frac{\partial (K' + P')}{\partial x} d\Sigma \quad (47)$$

由此可见, 局地区域扰动发展的总能量 $(K' + P')$ 来自于平均场的有效位能、平均场的动能以及基本风场 $\bar{U}$ 对扰动总能量的平流作用。(47)式右端第 1 项为平均场的有效位能向扰动场的有效位能转换项 $\langle \bar{P}, P' \rangle$, 第 2 项为平均场的动能向扰动场的动能转换项 $\langle \bar{K}, K' \rangle$ 。可见在由平均场动能向扰动场动能转换的过程中, 基本气流的水平切变和垂直切变起到非常重要的作用。在不考虑基本流场的情况下, 扰动发展的总能量 $(K' + P')$ 是守恒的, 而扰动动能 K' 的来源只能是来自于扰动的有效位能 P' , 此时背景场对扰动的发展不提供能源作用。因此, 背景场的风速水平切变以及垂直切变对于赤道大气扰动的发展起到至关重要的作用。

4 结 语

本文使用线性化的赤道 β 平面上满足静力平衡的热带大气 Boussinesq 近似方程组, 分析了纬向水平切变基流以及垂直切变基流中的赤道 Rossby 波、重力惯性内波以及混合 Rossby-重力惯性内波的稳定性特征, 得到如下结论:

(1) 基本气流风速的水平切变对赤道大气波动起到不稳定的作用。(2) 在考虑基本气流的水平切变时, 对于经向波数 $n \geq 1$ 的赤道波动而言, 基本气流的水平切变使得相对于基本气流向东传播的重力惯性内波相速度减慢, 相对于基本气流向西传播的重力惯性内波的相速度加快, 相对于基本气流向西传播的 Rossby 波相速度减慢。(3) 基本气流的水平切变使得经向波数 $n = 0$ 时的相对于基本气流向东传播的高频重力惯性内波相速度减慢。它对赤道混合 Rossby-重力惯性内波的影响主要取决于纬向波数 k 值的范围大小。当纬向波数 k 值较小时, 基流的水平切变使得相对于基本气流向西传播的混合 Rossby-重力惯性内波相速度加快; 当纬向波数 k 值较大时, 则使得相对于基本气流向西传播的混合 Rossby-重力惯性内波相速度减慢。(4) 基本气流的水平切变对赤道大气 Kelvin 波的频率、稳定性以及传播的相速度并不起作用。(5) 在半地转近似下, 由于风速水平切变的存在, 会使得波长较大 (纬向波数 $k \rightarrow 0$) 的赤道 Rossby 波相对于基本气流向西传播的相速度减慢; 而风速垂直切变的存在, 会引起这种波长较大 ($k \rightarrow 0$) 的 Rossby 波出现不稳定增长, 同样也会造成赤道 Rossby 波相对于基本气流向西传播的相速度减慢。(6) 通过扰动发展的能量方程说明了基本气流的水平切变和垂直切变可为扰动发展提供能量来源。

需要说明的是, 本文为了求得理论解析结果, 假定了风速切变为充分小的情况, 并采用小参数展开的方法, 对切变基流中赤道 β 平面上的大气运动方程组进行了求解, 讨论了纬向风速切变对赤道大气波动稳定性的作用。对于风速切变为正常大小时的情况以及采用实际资料进一步分析风速切变在热带大气低频振荡中的作用, 这是以后需要进一步研究的问题。

参考文献:

- [1] Matsuno T. Quasi-geostrophic motions in the equatorial area [J]. J Meteor Soc Japan 1966 44(1): 25-43
- [2] Boyd J P. The effects of latitudinal shear on equatorial waves Part I: Theory and methods [J]. J Atmos Sci 1978, 35(12): 2236-2258
- [3] Boyd J P. The effects of latitudinal shear on equatorial waves Part II: Applications to the atmosphere [J]. J Atmos Sci 1978, 35(12): 2259-2267
- [4] Boyd J P, Christidis Z D. The algebraic decay of equatorial Rossby waves in a shear flow [J]. Dyn Atmos Oceans 1987, 11(2): 139-151.
- [5] Zhang C D, Webster P J. Effects of zonal flows on equatorial Rossby waves [J]. J Atmos Sci 1989, 46(24): 3632-3652.
- [6] 周紫东, 狄新武, 杜行远. 赤道地区大气波动的理论分析 [J]. 中国科学, 1980, 23(5): 475-484.
- [7] 赵强, 刘式适. 基本流场切变对赤道长 Rossby 波的影响 [J]. 气象学报, 2001, 59(1): 23-30.
- [8] 李崇银. 南亚夏季风槽脊和热带气旋的活动与移动性 CISK 波 [J]. 中国科学 B 辑, 1985, 7(7): 668-675.
- [9] 李丽平, 王盘兴, 管兆勇. 大气季节内振荡研究进展 [J]. 南京气象学院学报, 2002, 25(4): 565-572.