文章编号: 1000-2022(2006)03-0429-05

一类双曲-抛物型方程的广义解

石兰芳
(南京信息工程大学 数学系,江苏 南京 210044)

摘 要: 讨论了一类奇摄动双曲-抛物型方程广义初边值问题,在适当的条件下,用 Galerkin 方法研究了广义解的存在性、唯一性,同时得到了解的渐近估计式。

关键词: 双曲-抛物型方程; 广义解; 奇摄动
中图分类号: O175.27 文献标识码: A

A Cass of the Generalized Solution of Hyperbolie-Parabolic Equation

SHI Lan-fang
(Department of Mathematics, NUIST, Nanjing 210044, China)

Abstract: The singularly perturbed generalized initial-boundary value problem for the hyperbolie-parabolic equation is considered. Under suitable conditions, the existence and uniqueness of its generalized solution is discussed by using Galerkin method, and the asymptotic estimation of solution is given.

Key words: hyperbolic-parabolic equation; generalized solution; singular perturbation

0 引 言

文献[1-4]研究了双曲-抛物型方程,而本文涉及的是一类双曲-抛物型奇摄动方程的广义解,现讨论如下一类双曲-抛物型奇摄动方程初边值问题:

$$\varepsilon^2 u_{tt}(x,t) + u_t(x,t) + Lu(x,t) = f(x,t), \quad \Omega\times(0,T), \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0, \quad \partial\Omega\times[0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x\in\Omega, \tag{3}$$

$$u_t(x,0) = u_1(x), \quad x\in\Omega。 \tag{4}$$

其中: ε是正的小参数, Ω为 R^n 中有界区域, $\partial\Omega$为 Ω的光滑边界, 且 $Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x,t)D_j u) + c(x,t)$。其中: $a_{ij}(x,t)$, $c(x,t)\in L^\infty(q)\times[0,T]$, 且 $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$, $\forall\xi\in R^n$, $x\in\Omega$, $\lambda>0$。

问题(1)~(4)的广义问题是指:

$$\varepsilon^2(u''(t),\varphi) + (u'(t),\varphi) + a(t,u,\varphi) = (f(t),\varphi), \tag{5}$$

收稿日期: 2004-04-30; 改回日期: 2005-01-12
基金项目: 南京信息工程大学校科研基金资助项目(Y408)
作者简介: 石兰芳(1976-),女,安徽庐江人,讲师,硕士,研究方向: 奇摄动理论. E-mail: shilf108@163.com.

$$(u(0)-u_0,\ \varphi)=0,\quad (u'(0)-u_1,\ \varphi)=0。\tag{6}$$

其中: $a(t,u,\varphi)=\int_\Omega\left\{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)D_juD_i\varphi+c(x,t)\varphi\right\}\mathrm{d}x=(Lu,\varphi)$。

表达式 $a(t,u,\varphi)$为 Lu 有关的共轭双线型形式, 其中 $H^1(\Omega)=\{v\mid v\in L^2(\Omega),Dv\in L^2(\Omega)\}$, $\varphi\in H_0^1(\Omega)=\{v\mid v\in H^1(\Omega),v|_{\partial\Omega}=0\}$, (u,v)为定义在 $H_0^1(\Omega)$中的内积, 任意 $t\in[0,T]$, 记 $u(t):=u(\cdot,t)\in H_0^1(\Omega)$, $f(t):=f(\cdot,t)\in H_0^1(\Omega)$。满足问题(5)~(6)的解为问题(1)~(4)的广义解。

1 广义解的存在性和唯一性

首先考虑问题(1)~(4)的退化问题:

$$u_t(x,t)+Lu(x,t)=f(x,t),\quad \Omega\times(0,T),\tag{7}$$

$$u(x,t)=0,\quad \partial\Omega\times[0,T],\tag{8}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\Omega。\tag{9}$$

相应的广义边值问题:

$$(u'(t),\varphi)+a(t,u,\varphi)=(f(t),\varphi),\tag{10}$$

$$(u(0)-u_0,\varphi)=0。\tag{11}$$

由文献[6]知(10)~(11)存在唯一解 $U_0(t)$, 其中 $U_0(t)=U_0(\cdot,t)$。

本文作如下假设:

$[H_1]$: 可分空间 V和H 是两个 Hilbert空间, 满足条件 $V\subset H$, 对 $\forall u\in V$, 存在常数 C 使得 $|u|\leqslant C\|u\|$, 其中 $|\ |$和 $\|\ \|$分别表示H 和 V的范数, 且 V在 H 中稠密, 即由 $|u|=0$ 得到 $\|u\|=0$。

$[H_2]$: $a(t,u,\varphi)$, $t\in[0,T]$满足条件且有 $a(\cdot,u,\varphi)\in C'([a,T])$, $\forall u,\varphi\in V$。

$[H_3]$: 存在 $\lambda,\alpha>0$ 使得 $a(t,u,\varphi)+\lambda|\varphi|^2\geqslant\alpha\|\varphi\|^2$, $\forall\varphi\in V$。

$[H_4]$: $f\in L^2((0,T),H)$, $u_0\in V$, $u_1\in H$。

引理 1 在假设$[H_1]$~$[H_4]$下, 存在唯一函数 $u\in L^\infty(0,T;H)$满足 $u'\in L^2(0,T;H)$、$u''\in L^2(0,T;V')$和方程(5)和(6)。

证明 若 $u\in L^\infty(0,T;V)$, 则 $Lu\in L^\infty(0,T;V')$, 从而 $u''\in L^2(0,T;V')$。又 $u'\in L^\infty(0,T;H)$, 于是有 $u\in C([0,T];H)$, $u'\in C([0,T];V')$, 这样 $u(0)$和 $u'(0)$有意义。

由 V的可分性, 可取$\{w_i\mid i=1,2,\cdots\}\subset V$, w_i的有限线性组合的子空间在 V中稠密, 又可设$\{w_i\mid i=1,2,\cdots\}$在H 中标准正交, 即$(w_i,w_j)=\delta_{ij}$。以下列方式确定m 阶近似解 $u_m(t)=\sum_{i=1}^m g_{mi}w_i$, 其中 $g_{mi}=g_{mi}(t)$由下列常微分方程组的 Cauchy问题确定:

$$\varepsilon^2g''_{mj}+g'_{mj}+a(t,u_m(t),w_j)=\varepsilon^2(u''_m,w_j)+(u'_m,w_j)+a(t,u_m(t),w_j)=(f(t),w_j),\tag{12}$$

$$(g_{mi}(0)-\xi_{mi},w_i)=0,\ (g'_{mi}(0)-\eta_{mi},w_i)=0,\tag{13}$$

ξ_{mi}和 η_{mi}作如下选择, 使 $m\to\infty$时,

$$\left\|\sum_{i=1}^m\xi_{mi}w_i-u_0\right\|\to0,\quad \left|\sum_{i=1}^m\eta_{mi}w_i-u_1\right|\to0。$$

方程(12)可改写为 $\varepsilon^2g''_{mj}+g'_{mj}+\sum_{i=1}^m a(t,w_i,w_j)g_{mi}=(f(t),w_j)$, $j=1,2,\cdots,m$。这里 g_{mi}的系数 $a(t,w_i,w_j)\in C([0,T])$, 自由项$(f(t),w_j)\in L^2(0,T)$。

由常微分方程组的理论知存在(12)的唯一解 g_{mi}, $i=1,2,\cdots,m$, 且 $g_{mi}\in C^1([0,T])$, g'_{mi}在$[0,T]$绝对连续。方程(12)乘以 g'_{mj}, 对 j从 1至m 求和

$$\varepsilon^2{}''(u''_m,u'_m)+(u'_m,u'_m)+a(t,u_m(t),u'_m(t))=(f(t),u'_m(t))。$$

在$(0,T)$上积分, 取实部的 2倍, 得

$$\int_0^T \varepsilon^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u'_m, u'_m)\mathrm{d}t + \int_0^T |u'_m(t)|^2 \mathrm{d}t + \int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a\left(t, u_m(t), u_m(t)\right)\mathrm{d}t -$$

$$\int_0^T a'(t, u_m(t), u_m(t))\mathrm{d}t = 2\mathrm{Re}\int_0^T (f(t), u'_m(t))\mathrm{d}t,$$

$$\varepsilon^2 |u'_m(T)|^2 - \varepsilon^2 |u'_m(0)|^2 + \int_0^T |u'_m(t)|^2 \mathrm{d}t + a(T, u_m(T), u_m(T)) -$$

$$a(0, u_m(0), u_m(0)) - \int_0^T a'\left(t, u_m(t), u_m(t)\right)\mathrm{d}t = 2\mathrm{Re}\int_0^T (f(t), u'_m(t))\mathrm{d}t。$$

利用 a 的强制性 (设 $\lambda = 0$)和 a、a'的有界性, 有

$$\varepsilon^2 |u'_m(T)|^2 + \alpha \| u_m(T)\|^2 \leqslant$$

$$M\| u_m(0)\|^2 + |u'_m(t)|^2 + \varepsilon^2 |u'_m(0)|^2 + M\int_0^T \| u_m(t)\|^2 \mathrm{d}t + \int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t。$$

利用 Gronwall不等式, 并换 T 为 t得到不依赖于 m 的常数K 使

$$\varepsilon^2 |u'_m(t)|^2 + \| u_m(t)\|^2 \leqslant C\left(\| u_m(0)\|^2 + |u'_m(0)|^2 + \int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right) \leqslant K。 \tag{14}$$

于是存在子序列 (仍记为 u_m)满足: 当 $m \to \infty$时, $u_m \to u$, 在 $L^\infty(0, T; V)$中弱收敛, $u_m \to u'$, 在 $L^\infty(0, T; H)$中弱收敛, 现在过渡到极限。

令

$$C_T^1([0, T]) = \{\varphi \in C^1([0, T]) \mid \varphi(T) = 0\},$$

考虑函数:

$$\phi = \sum_{j=1}^N \varphi_j w_j,\ \varphi_j \in C_T^1([0, T]), \tag{15}$$

在 (12)中取 $m > N$, (12)乘以 φ_j, 从 1至N 求和, 进行分部积分

$$\int_0^T [a(t, u_m(t), \phi) - \varepsilon^2(u'_m, \phi') - (u_m, \phi')]\mathrm{d}t = \int_0^T (f, \phi)\mathrm{d}t + (u'_m(0), \phi(0)) + (u_m(0), \phi(0)),$$

令 $m \to \infty$, 得到

$$\int_0^T [a(t, u, \phi) - \varepsilon^2(u', \phi') - (u, \phi')]\mathrm{d}t = \int_0^T (f, \phi)\mathrm{d}t + (u_1, \phi(0)) + (u_0, \phi(0))。$$

令

$$\Psi = \{\phi \in L^2(0, T; V) \mid \phi' \in L^2(0, T; H), \phi(T) = 0\}。$$

由文献 [6]引理 4.24知, (15)式给出的函数在中 Ψ稠密, 这里在 Ψ中取范数

$$\|\phi\|_\Psi^2 = \|\phi\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \|\phi'\|_{L^2(0,T;H)}^2。$$

于是对任意 $\phi \in \Psi$,

$$\int_0^T [a(t, u, \phi) - \varepsilon^2(u', \phi') - (u, \phi')]\mathrm{d}t = \int_0^T (f, \phi)\mathrm{d}t + (u_0, \phi(0)) + (u_1, \phi(0))。 \tag{16}$$

对任意 $\phi \in C_0^\infty(0, T)$, $v \in V$, 在 (16)中取 $\phi = \varphi v$ 得

$$\left(\int_0^T a(t, u, \varphi)\mathrm{d}t - \int_0^T f\varphi \mathrm{d}t + \varepsilon^2 \int_0^T (-u')\varphi' \mathrm{d}t + \int_0^T (-u)\varphi' \mathrm{d}t, v\right) = 0。$$

由此得:

$$\varepsilon^2(u'', \varphi) + (u', \varphi) + a(t, u, \varphi) = (f, \varphi), \tag{17}$$

$$\varepsilon^2 u''(t) + u'(t) + A(t)u(t) = f(t)。 \tag{18}$$

任取 $\phi \in C_T^1([0, T])$, 方程 (18)作对偶积, 并在上积分, 利用分部积分公式得

$$\int_0^T a(t, u, \phi)\mathrm{d}t - \int_0^T \varepsilon^2(u', \phi')\mathrm{d}t - \int_0^T (u, \phi')\mathrm{d}t = \int_0^T (f, \phi)\mathrm{d}t + (u(0), \phi(0) + (u'(0), \phi(0)),$$

此式与 (16)比较得

$$(u(0) - u_0, \phi(0)) = 0, \quad (u'(0) - u_1, \phi(0)) = 0。$$

对任意 $\varphi\in V$, 取

$$\psi(t)=\rho(t)\varphi,\quad \rho\in C^{\infty}([0,T]),\quad \rho(0)=1,\ \rho(T)=0,$$

得

$$(u(0)-u_0,\ \varphi(0))=0,\ \forall\ \varphi\in V。$$

同理

$$(u'(0)-u_1,\ \varphi(0))=0,\ \forall\ \varphi\in V。$$

于是解的存在性得证, 下面证明其唯一性。

设 $f=0$, $u_0=0$, $u_1=0$, 要证 $u=0$。任取 $s\in(0,T)$, 令

$$\varphi(t)=\begin{cases}-\int_t^s u(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma, & t\leqslant s,\\ 0, & t>s。\end{cases}$$

把这个 φ 代入 (16), 得

$$\int_0^s[a(t,\varphi'(t),\varphi(t))-\varepsilon^2(u'(t),u(t))-(u(t),u(t))]\,\mathrm{d}t=0,$$

$$\int_0^s\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a\left(t,\varphi(t),\varphi(t)\right)-a'(t,\varphi(t),\varphi(t))-\varepsilon^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t),u(t))\right]\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^s|u|^2\mathrm{d}t=0,$$

$$a(0,\varphi(0),\varphi(0))+\varepsilon^2(u(s),u(s))+\frac{1}{2}\int_0^s|u(t)|^2\mathrm{d}t+\int_0^s a'(t,\varphi(t),\varphi(t))\,\mathrm{d}t=0。$$

由 a 的强制性和 a' 的有界性, 有

$$\|\varphi(0)\|^2+|u(s)|^2\leqslant c\int_0^s\|\varphi(t)\|^2\mathrm{d}t,$$

令 $v=\int_0^t u(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$, 则

$$\|v(s)\|^2+|u(s)|^2+\frac{1}{2}\int_0^s|u(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant c\int_0^s\|v(t)-v(s)\|^2\mathrm{d}t\leqslant 2c\int_0^s\|v(t)\|^2\mathrm{d}t+2c_s\|v(s)\|^2,$$

$$(1-2c_s)\|v(s)\|^2+\frac{1}{2}\int_0^s|u(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant 2c\int_0^s\|v(t)\|^2\mathrm{d}t,$$

$$(1-2c_s)\|v(s)\|^2\leqslant 2c\int_0^s\|v(t)\|^2\mathrm{d}t。$$

取 $s_0>0$ 满足 $1-2c_{s_0}=\frac{1}{2}$, 当 $0<s\leqslant s_0$ 时,

$$\|v(s)\|^2\leqslant 4c\int_0^s\|v(t)\|^2\mathrm{d}t。$$

由 Gronwall 不等式, 当 $s\leqslant s_0$ 时 $v(s)=0$ 从而 $u(s)=0$, s_0 的大小不依赖于时间起点的选取, 故 u 在 $[s_0,\ 2s_0]$ 上为零, 有限步后即得出 u 在 $[0,T]$ 上为零。

对非零初值 $u_0\neq 0$, 类似文献 [6] 定理 4.4 方法, 可证它的唯一性。于是有定理 1。

定理 1 在假设 $[H_1]\sim[H_4]$ 下, 对充分小的 ε, 奇摄动问题 (1) ~ (4) 存在唯一广义解 $u\in L^{\infty}(0,T;H)$, 且满足估计式

$$\varepsilon^2|u'(t)|^2|+\|u\|^2\leqslant C。\tag{19}$$

2 渐近解的构造

设 $u(t,x)$ 为问题 (5) ~ (6) 的广义解, 作伸长变量的变换: $\tau=\frac{t}{\varepsilon^2}$, 并设

$$u(x,t)=U_0(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}(U_n(x,t)+V_{n-1}(x,\tau))\varepsilon^n,$$

记 $U_n(t):=U_n(x,t)\in H_0^1(\Omega)$, $V_n(\tau):=V_n(x,\tau)$, $n=1,2,\cdots$。其中: $U_0(t)$ 为广义退化问题 (10) 和 (11) 的

解, $U=U_0(t)+\sum_{n=1}^{N}U_n(t)$为外部解, $V=\sum_{n=1}^{N}V_{n-1}(t)\varepsilon^n$为初始层校正函数, 它们分别满足:

$$(U'_n(t),\varphi)+a(t;U_n(t),\varphi)=\begin{cases}(f(t),\varphi), & n=0,\\ 0, & n=1,\\ (-U''_{n-2}(t),\varphi), & 2\leqslant n\leqslant N,\end{cases}\tag{20}$$

$$(U_n(0)-U_n,\varphi)=0,\qquad n=0,1,\tag{21}$$

$$(U_n(0)+V_{n-1}(0),\varphi)=0,\qquad 2\leqslant n\leqslant N,\tag{22}$$

和

$$(V''_n(\tau),\varphi)+(V'_n(\tau),\varphi)=\begin{cases}0, & n=0,1,\\ -a(t;V_{n-2}(\tau),\varphi), & 2\leqslant n\leqslant N-1,\end{cases}\tag{23}$$

$$(V'_n(0)-U_1(0),\varphi)=0,\qquad n=0,\tag{24}$$

$$(V'_n(0)+U'_{n-1}(0),\varphi)=0,\qquad 1\leqslant n\leqslant N-1。\tag{25}$$

3 余项估计

设 $u(x,t)=U_0(x,t)+\sum_{n=1}^{N}[U_n(x,t)+V_{n-1}(x,\tau)]\varepsilon^n+R(x,t)$, 其中 $R(x,t)$为余项, 下面给出余项的先验估计。

令 $u(x,t)=U_0(x,t)+\sum_{n=1}^{N}[U_n(x,t)+V_{n-1}(x,\tau)]\varepsilon^n$, 则 $R(x,t)=u(x,t)-u(x,t)$, 由(20)~(25)及形式解的构造过程, 有

$$\varepsilon^2(R''(t),\varphi)+(R'(t),\varphi)+a(t;R(T),\varphi)=(-P(t),\varphi),\tag{26}$$

$$(R(0)-R_0,\varphi)=0,\tag{27}$$

$$(R'(0)-R_1,\varphi)=0。\tag{28}$$

其中: $P(t)=U''_{N-1}(t)\varepsilon^{N+1}+U''_N(t)\varepsilon^{N+2}+a(t;V_N(\tau),\varphi)\varepsilon^{N+1}+a(t;V_{N+1}(\tau),\varphi)\varepsilon^{N+2}$, $R_0=-V_N(0)\varepsilon^{N+1}-V_{N+1}(0)\varepsilon^{N+2}$, $R_1=0$。

把(14)式应用到 $R(t)$, 有

$$\varepsilon^2|R'(t)|^2+\|R(t)\|^2\leqslant C\left(\|R(0)\|^2+|R'(0)|^2+\int_0^T|P(t)|^2\mathrm{d}t\right),$$

所以

$$\|R(t)\|=O(\varepsilon^{N+1}),\quad 0<\varepsilon\ll 1。$$

于是得到定理 2。

定理 2 在假设[H_1]~[H_4]下, 对充分小的 ε, 奇摄动问题(1)~(4)存在唯一广义解 $u\in L^\infty(0,T;H)$, 且具有如下的形式渐近式:

$$u(x,t)=U_0(x,t)+\sum_{n=1}^{N}[U_n(x,t)+V_{n-1}(x,t)]\varepsilon^n+O(\varepsilon^{N+1}),\quad 0<\varepsilon\ll 1,$$

且满足

$$\left\|u(x,t)-U_0(x,t)-\sum_{n=1}^{N}[U_n(x,t)+V_{n-1}(x,t)]\varepsilon^n\right\|=O(\varepsilon^{N+1}),\quad 0<\varepsilon\ll 1。$$

参考文献:

[1] Antman S S, Seidman T I. Quasilinear hyperbolic-parabolic equations of one dimensional viscoelasticity[J]. J Differential Equations, 1996, 124(1): 132-185.

[2] 倪星棠. 一类三阶抛物双曲混和型偏微分方程的边值问题[J]. 数学学报, 1994, 37(5): 632-638.

[3] 沈锦仁. 变系数双曲-抛物奇异摄动问题的渐近展开[J]. 高等学校计算数学学报, 1993, 15(3): 268-274

[4] 石兰芳. 双曲-抛物偏微分方程的奇摄动问题的差分解法[J]. 纯粹数学与应用数学, 2003, 19(2): 106-111.

[5] DeJager E M, Jiang Furu. The Theory of Singular Perturbation[M]. Amsterdam: North-Holland Publishing Co, 1996

[6] 王耀东. 偏微分方程的 L^2 理论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1989.