第 28卷第 1期 南京气象学院学报 Vol. 28 No. 1
2005年 2月 Journal of Nanjing Institute of Meteorology Feb. 2005

文章编号: 1000-2022(2005)01-0072-06

非共振二阶椭圆型方程解的存在唯一性

徐晶晶, 周伟灿, 官元红
(南京信息工程大学 数学系,江苏 南京 210044)

摘 要: 利用 Galerkin逼近方法和 minimax原理, 证明了非线性非共振椭圆型方程弱解的存在唯一性。

关键词: 非线性椭圆型方程组; 弱解; Galerkin方法; minimax原理; 临界点
中图分类号: O175.25; O177 文献标识码: A

非共振问题一直是微分方程研究的热点之一, 其存在唯一性的研究方法有变分方法、全局同胚方法、算子半群方法等。其中, 对全局同胚方法的研究较多, 但大部分应用于常微分方程, 国内外学者[1-5]在这方面作了很多贡献。邵荣等[6]用其研究了一类二阶半线性椭圆型方程边值问题, 并得出了某些条件下解的存在性。关于变分方法, 1975年, Lazer等[7]发展了 minimax原理, 并将之应用于一类非线性椭圆型方程, 得出了存在唯一性结果。后来又出现了 minimax原理的非变分形式[8-9], 并用其解决了不少问题。关于满足非共振条件的偏微分方程组 $Lu + \nabla G(u) = f$的 Dirichlet问题, Bates等[10]对 L是波动算子的情况进行了讨论, 利用 Galerkin逼近方法和 minimax原理证明了其弱解存在且唯一。Ahmad[11]和 Lazer[12]分别证明了类似的二阶常微分方程组解的存在性和唯一性。

本文研究了如下问题弱解的存在唯一性

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla G(u) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega = (0, \pi) \times (0, \pi); \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega。\end{cases} \tag{1}$$

其中 Δ为 Laplace算子 $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $R(\Delta)$表示具有 Dirichlet边界条件的 Laplace算子 $\Delta: D(\Delta) \subset (L_2(\Omega))^n \to (L_2(\Omega))^n$的值域。$G: R^n \to R$为 C^2中的函数, $f: \Omega \to R^n$为连续函数。

假设存在两个 $n \times n$的实对称矩阵 $\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B}$, 并各有特征值 $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \dots \leqslant \alpha_n$和 $\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \dots \leqslant \beta_n$, 使得

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i]\right) \cap \{-k^2 - l^2; k, l \in \mathbb{N}\} = \varnothing, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{A} \leqslant (\partial^2 G(u)/\partial u_i \partial u_j) \leqslant \boldsymbol{B}, \tag{3}$$

对所有 $u \in R^n$成立, 则称之为非共振条件。

本文用文献[10]中的方法研究了二阶椭圆型方程组。首先, 运用 Galerkin逼近方法在每

收稿日期: 2003-11-21; 改回日期: 2004-03-24
基金项目: 江苏省高校自然科学研究计划项目(02KSB170002)
作者简介: 徐晶晶(1980-), 女, 江苏东台人, 硕士, 研究方向: 偏微分方程, E-mail: lb474153@126.com.

个有限维的步上, 应用文献[7]中的 minimax原理, 证明了近似解的存在唯一性; 然后由条件(3)给出近似解在 $(L_2(\Omega))^n$ 中的先验估计, 由此推出具有 Dirichlet边界条件的算子 Δ 在 $R(\Delta)$上有一个紧逆, 即存在 $u\in R(\Delta)$; 最后证明了 u 在弱的意义下满足方程组(1), 且其是唯一的。此外, 文献[10]中有关泛函 J 为 C^2 的部分不严密, 本文补充了这部分证明。

这里用的方法稍作修改, 即可用于其他边界(Neumann, 周期, 混合等)条件。

1 记号和主要引理

令 $\{a_i; i=1,\cdots,n\}$ 和 $\{b_i; i=1,\cdots,n\}$ 是 R^n 中的标准正交基, 使得

$$\boldsymbol{A}a_i=\alpha_i a_i,\quad \boldsymbol{B}b_i=\beta_i b_i;\qquad i=1,\cdots,n。\tag{4}$$

用 $\phi_{kl}:\Omega\to R$ 表示由 $\phi_{kl}(x,y)=(2/\pi)\sin kx\sin ly$ 定义的函数, 显然 $\{\phi_{kl}; k,l\in\mathbb{N}\}$ 是 $L_2(\Omega)$ 中的标准正交系。

对每个正整数 N, 定义

$$\begin{aligned}
X_N&=\Big\{\sum_{i,k,l}\mu_{ikl}\phi_{kl}b_i;\ 1\leqslant i\leqslant n,\ -k^2-l^2>\beta_i,\ k^2\leqslant N,\ l^2\leqslant N,\ \mu_{ikl}\in\mathbf{R}\Big\},\\
\Upsilon_N&=\Big\{\sum_{i,k,l}\mu_{ikl}\phi_{kl}b_i;\ 1\leqslant i\leqslant n,\ -k^2-l^2<\beta_i,\ k^2\leqslant N,\ l^2\leqslant N,\ \mu_{ikl}\in\mathbf{R}\Big\},\\
Z_N&=\Big\{\sum_{i,k,l}\mu_{ikl}\phi_{kl}a_i;\ 1\leqslant i\leqslant n,\ -k^2-l^2<\alpha_i,\ k^2\leqslant N,\ l^2\leqslant N,\ \mu_{ikl}\in\mathbf{R}\Big\},\\
E_N&=\Big\{\sum_{k,l}c_{kl}\phi_{kl};\ k^2\leqslant N,\ l^2\leqslant N,\ c_{kl}\in R^n\Big\}。
\end{aligned}\tag{5}$$

因为 $-k^2-l^2\neq\beta_i$, 显然 $X_N\oplus\Upsilon_N=E_N$ 且 $\bigcup_{N=1}^{\infty}E_N$ 在 $(L_2(\Omega))^n$ 中稠密。

证明本文结论需要文献[7]中的主要结果:

引理 1　令 j 是一个 Hilbert空间 H上的 C^2 泛函, 对每个 $u\in H$, $\nabla j(u)$ 和 $D^2j(u)$ 表示 j 在 u 处的梯度和 Hessian矩阵。设 X和 Z是 H上的闭子空间(不必正交), 使得 X是有限维的, 且 $H=X\oplus Z$。若存在常数 m_1、$m_2>0$, 使得对所有的 $u\in H$、$w\in Z$、$v\in X$,

$$\langle D^2j(u)w,w\rangle\geqslant m_1\|w\|^2,$$
$$\langle D^2j(u)v,v\rangle\leqslant -m_2\|v\|^2。$$

则存在唯一的 $u_0\in H$, 使得 $\nabla j(u_0)=0$ 和 $j(u_0)=\max_{x\in X}\min_{y\in Z}j(x+y)$。在这里, 内积符号 $\langle,\rangle$ 解释为 Banach空间 B 和它的共轭空间 B^* 间的对偶。

定义泛函 $J:(H_0^1(\Omega))^n\to R$ 为

$$J(u)=\int_\Omega\{[(\partial u/\partial x,\partial u/\partial x)+(\partial u/\partial y,\partial u/\partial y)]/2+G(u)-(f,u)\}。\tag{6}$$

其中(,)表示 R^n 中通常的内积。

令 $\langle,\rangle_0$ 和 $\|\ \|_0$ 分别表示 $(L_2(\Omega))^n$ 空间中通常的内积和范数, 令 $\langle,\rangle_1$ 和 $\|\ \|_1$ 分别表示 $(H_0^1(\Omega))^n$ 空间中的内积 $\langle u,v\rangle_1=\int_\Omega[(\partial u/\partial x,\partial v/\partial x)+(\partial u/\partial y,\partial v/\partial y)]$ 和范数 $\|v\|_1^2=\int_\Omega(|\partial v/\partial x|^2+|\partial v/\partial y|^2)$。

引理 2　$J(u)$是 $(H_0^1(\Omega))^n$ 上的 C^2 泛函。

证明　显然 $\exists\, c>0$, 使得 $\|u\|_0\leqslant c\|u\|_1$。　(7)

固定 u, 对 $\forall v\in(H_0^1(\Omega))^n$,

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla J(u), v\rangle_1 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J(u+tv)\Big|_{t=0} \\
&= \int_\Omega \left\{\left[\left(\frac{\partial(u+tv)}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial(u+tv)}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] + (\nabla G(u+tv), v) - (f, v)\right\}\Big|_{t=0} \\
&= \int_\Omega \left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] + (\nabla G(u), v) - (f, v)\right\}。
\end{aligned}
$$

显然, 由分部积分可得

$$
\nabla J(u) = -\Delta u + \nabla G(u) - f。 \tag{8}
$$

固定 u, 对 $\forall w, v \in (\mathrm{H}_0^1(\Omega))^n$,

$$
\begin{aligned}
\langle D^2 J(u)w, v\rangle_1 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \nabla J(u+tw), v\rangle_1\Big|_{t=0} \\
&= \int_\Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left[\left(\frac{\partial(u+tw)}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial(u+tw)}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] + \right. \\
&\qquad \left.(\nabla G(u+tw), v) - (f, v)\right\}\Big|_{t=0} \\
&= \int_\Omega \{[(\partial w/\partial x, \partial v/\partial x) + (\partial w/\partial y, \partial v/\partial y)] + \\
&\qquad ((\partial^2 G(u)/\partial u_i \partial u_j)w, v)\}。
\end{aligned} \tag{9}
$$

显然

$$
\langle D^2 J(u)w, w\rangle_1 = \int_\Omega \{[|\partial w/\partial x|^2 + |\partial w/\partial y|^2] + ((\partial^2 G(u)/\partial u_i \partial u_j)w, w)\}。 \tag{10}
$$

因此, J 有二阶 Gateaux微分, 若 $D^2 J(u)$ 关于 u 连续, 则 $D^2 J$ 是二阶 Frechet导算子。

事实上, 若 $D^2 J(u)$ 关于 u 不连续, 则存在 $\varepsilon > 0$ 和 $(\mathrm{H}_0^1(\Omega))^n$ 中的序列 $\{u_n\}_1^\infty$, 使得对 $u \in (\mathrm{H}_0^1(\Omega))^n$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \| u - u_n \|_1 = 0$, 但

$$
\| D^2 J(u) - D^2 J(u_n) \| > \varepsilon。 \tag{11}
$$

所以存在序列 $\{w_n\}_1^\infty$, 使得 $\| w_n \|_1 = 1$, 且 $\| D^2 J(u)w_n - D^2 J(u_n)w_n \|_1 > \varepsilon$, 由此推出存在序列 $\{v_n\}_1^\infty$, 使得 $\| v_n \|_1 = 1$, 且

$$
\langle D^2 J(u)w_n, v_n\rangle_1 - \langle D^2 J(u_n)w_n, v_n\rangle_1 > \varepsilon。 \tag{12}
$$

不妨设 $\{w_n\}_1^\infty$, $\{v_n\}_1^\infty$ 在 $(\mathrm{H}_0^1(\Omega))^n$ 中各自弱收敛于 w 和 v。所以当 $n \to \infty$ 时, $\| w - w_n \|_0 \to 0$, $\| v - v_n \|_0 \to 0$。由 (7)式和 (11)式, 当 $n \to \infty$ 时, $\| u - u_n \|_0 \to 0$, 即 $\{u_n\}_1^\infty$ 几乎处处收敛于 u。

由 (3)式和 (9)式, 有

$$
\begin{aligned}
&\langle D^2 J(u)w_n, v_n\rangle_1 - \langle D^2 J(u_n)w_n, v_n\rangle_1 \\
&= \int_\Omega ((\partial^2 G(u)/\partial u_i \partial u_j)w_n, v_n) - ((\partial^2 G(u_n)/\partial u_i \partial u_j)w_n, v_n)] \\
&= \int_\Omega (\partial^2 G(u)/\partial u_i \partial u_j - \partial^2 G(u_n)/\partial u_i \partial u_j)(w_n - w), v_n) + \\
&\quad \int_\Omega (\partial^2 G(u)/\partial u_i \partial u_j - \partial^2 G(u_n)/\partial u_i \partial u_j)w, v_n) \\
&\leqslant 2\| \boldsymbol{B} \| \, \| w_n - w \|_0 \| v_n \|_0 + \left(\int_\Omega \| \partial^2 G(u)/\partial u_i \partial u_j - \right. \\
&\quad \left. \partial^2 G(u_n)/\partial u_i \partial u_j \|^2 |w|^2\right)^{\frac{1}{2}} \| v_n \|_\infty
\end{aligned}
$$

显然, 第 1项趋于 0, 由 $\partial^2 G(u)/\partial u_i \partial u_j$ 的连续性和 Lebesgue控制收敛定理, 第 2项趋于 0。这与 (12)式矛盾, 所以 J 有二阶连续的 Frechet导算子, 即 J 是 C^2 类泛函, 证毕。

用 J_N 表示 J 在 E_N 上的限制, 则对所有的 $u, v \in E_N$, 有

$$\langle \nabla J_N(u), v \rangle_1 = \int_\Omega \left\{ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + (\nabla G(u), v) - (f, v) \right\}。$$

对所有的 $u, w, v \in E_N$, 有

$$\langle D^2 J_N(u)w, v \rangle_1 = \int_\Omega \{ [(\partial w/\partial x, \partial v/\partial x) + (\partial w/\partial y, \partial v/\partial y)] + ((\partial^2 G(u)/\partial u_i \partial u_j)w, v) \}。$$

引理 3　对每一个正整数 N, 存在唯一的 $u_N \in E_N$, 使得

$$\nabla J_N(u_N) = 0 \text{和} J_N(u_N) = \max_{x \in X_N} \min_{z \in Z_N} J(x + z)。$$

证明　固定 $u \in E_N$, 则对每一个 $w = \sum_{i,k,l} \mu_{ikl} \phi_{kl} a_i \in Z_N$, 有

$$\begin{aligned} \langle D^2 J_N(u)w, w \rangle_1 &= \int_\Omega \{ [|\partial w/\partial x|^2 + |\partial w/\partial y|^2] + ((\partial^2 G(u)/\partial u_i \partial u_j)w, w) \} \\ &\geqslant \int_\Omega \{ [|\partial w/\partial x|^2 + |\partial w/\partial y|^2] + (\boldsymbol{A}w, w) \} \\ &= \sum_{i,k,l} (k^2 + l^2 + \alpha_i) \mu_{ikl}^2 \geqslant m_1 \|w\|_0^2。 \end{aligned} \tag{13}$$

其中 $m_1 = \min\{k^2 + l^2 + \alpha_i; 1 \leqslant i \leqslant n, l, k \in \mathbb{N}, k^2 + l^2 + \alpha_i > 0\}$。

类似地, 对 $v \in X_N$,

$$\langle D^2 J_N(u)v, v \rangle_1 \leqslant \sum_{i,k,l} (k^2 + l^2 + \beta_i) \mu_{ikl}^2 \leqslant -m_2 \|v\|_0^2。 \tag{14}$$

其中 $m_2 = \min\{-k^2 - l^2 - \beta_i; 1 \leqslant i \leqslant n, l, k \in \mathbb{N}, k^2 + l^2 + \beta_i < 0\}$。

由此可知, $X_N \cap Z_N = \{0\}$, 容易看出 $\dim Z_N = \dim \Upsilon_N$, 所以 $E_N = X_N \oplus Z_N$。因此由引理 2, (13)式和 (14)式, 应用引理 1即可, 证毕。

而由 (8)式知, 存在唯一的 $u_N \in E_N$, 使得 $-\Delta u_N + \nabla G(u_N) - f = 0$。

2　主要定理

本文主要结论为

定理 1　如果 (2)式和 (3)式成立, 则方程 (1)存在唯一的弱解, 且此弱解属于 $(H_0^1(\Omega))^n$。

证明　记 $u_N = u_N^1 + u_N^2$, 且 $u_N^1 \in X_N$, $u_N^2 \in Z_N$, 由引理 3有

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla J_N(u_N), u_N^1 - u_N^2 \rangle_1 \\ &= \int_\Omega \Big\{ (\partial u_N^1/\partial x, \partial u_N^1/\partial x) + (\partial u_N^1/\partial y, \partial u_N^1/\partial y) - (\partial u_N^2/\partial x, \partial u_N^2/\partial x) - (\partial u_N^2/\partial y, \partial u_N^2/\partial y) + \\ &\quad \left(\int_0^1 (\partial^2 G(su_N)/\partial u_i \partial u_j) u_N \mathrm{d}s, (u_N^1 - u_N^2) \right) - (f, u_N^1 - u_N^2) \Big\} \\ &\leqslant \int_\Omega \{ (\partial u_N^1/\partial x, \partial u_N^1/\partial x) + (\partial u_N^1/\partial y, \partial u_N^1/\partial y) - (\partial u_N^2/\partial x, \partial u_N^2/\partial x) - (\partial u_N^2/\partial y, \partial u_N^2/\partial y) + \\ &\quad (\boldsymbol{B}u_N, u_N^1 - u_N^2) + \|f\|_0 (\|u_N^1\|_0 + \|u_N^2\|_0) \} \\ &\leqslant \int_\Omega \{ (\partial u_N^1/\partial x, \partial u_N^1/\partial x) + (\partial u_N^1/\partial y, \partial u_N^1/\partial y) - (\partial u_N^2/\partial x, \partial u_N^2/\partial x) - (\partial u_N^2/\partial y, \partial u_N^2/\partial y) + \\ &\quad (\boldsymbol{B}u_N^1, u_N^1) - (\boldsymbol{A}u_N^2, u_N^2) + \|f\|_0 (\|u_N^1\|_0 + \|u_N^2\|_0) \} \\ &\leqslant -m_2 \|u_N^1\|_0^2 - m_1 \|u_N^2\|_0^2 + \|f\|_0 (\|u_N^1\|_0 + \|u_N^2\|_0)。 \end{aligned} \tag{15}$$

其中 m_1、m_2 同引理3。因为 m_1、m_2 是正的，且关于 N 独立，不等式(15)证明了 $\{u_N\}_N$ 在 $(L_2(\Omega))^n$ 中有界。

由上知，对每一个 $h\in R(\Delta)$，存在唯一的 u 是方程

$$\begin{cases}\Delta u = h, & u\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega} = 0\end{cases}$$

的一个非零弱解，且 $u\in(\mathrm{H}_0^1(\Omega))^n$ 并存在常数 $c>0$，使得

$$\|u\|_1\leqslant c\|h\|_0。\tag{16}$$

令 Q_N 表示在 $\mathrm{E}_N\cap R(\Delta)$ 上的正交投影，由引理3有，在 Ω 中，$\Delta u_N = -Q_N(f-\nabla G_N(u))$；在 $\partial\Omega$ 上，$u_N=0$。所以由(16)式有

$$\|u_N\|_1\leqslant c\left(\|f\|_0+\left\|\int_0^1(\partial^2G(su_N)/\partial u_i\partial u_j)u_N\,\mathrm{d}s\right\|_0\right)$$

$$\leqslant c(\|f\|_0+\sup\{|\alpha_i|\,\|u_N\|_0,\ |\beta_i|\,\|u_N\|_0;\ i=1,\cdots,n,N=1,2,\cdots\})$$

$$\equiv K。\tag{17}$$

因此 $\{u_N\}_N$ 在 $(\mathrm{H}_0^1(\Omega))^n$ 中有界，令 $\{u_{N_j}\}_j$ 弱收敛到 u_0，则 u_0 是方程(1)的弱解。事实上，令 $\phi:\Omega\to R^n$ 为 Ω 中有紧支集的任意 C^∞ 函数，ϕ_j 是 ϕ 在 E_{N_j} 上的正交投影。因为 $\bigcup_{j=1}^{\infty}\mathrm{E}_{N_j}$ 在 $(L_2(\Omega))^n$ 中稠密，所以在 $(L_2(\Omega))^n$ 中，$\phi_j\to\phi$，$\Delta\phi_j\to\Delta\phi$。因此应用引理3，有 $\langle\nabla J(u_{N_j}),\phi_j\rangle=0$，所以

$$\int_\Omega\{(-\Delta u_0,\phi)+(\nabla G(u_0),\phi)-(f,\phi)\}$$

$$=\int_\Omega\{(u_0,-\Delta(\phi-\phi_j))+(\nabla G(u_0),\phi-\phi_j)-(f,\phi-\phi_j)+(u_0,-\Delta\phi_j)+$$
$$(\nabla G(u_0),\phi_j)-(f,\phi_j)-(u_{N_j},-\Delta\phi_j)-(\nabla G(u_{N_j}),\phi_j)+(f,\phi_j)\}$$

$$=\int_\Omega\{(u_0,-\Delta(\phi-\phi_j))+(\nabla G(u_0),\phi-\phi_j)-(f,\phi-\phi_j)+$$
$$(u_0-u_{N_j},-\Delta\phi_j)+(\nabla G(u_0)-\nabla G(u_{N_j}),\phi_j)\}。\tag{18}$$

显然当 j 趋向于 ∞ 时，等式右边趋向于0。因此，根据弱解的定义，由以上构造得出，u_0 是方程(1)的弱解，且属于 $(\mathrm{H}_0^1(\Omega))^n$，这证明了定理的存在性部分。

最后，证明方程(1)最多有一个弱解。假设 u^1 和 u^2 是两个这样的解。对 $i=1,2$，令 $u_N^i=x_N^i+z_N^i$ 是 u^i 在 E_N 上的投影，其中 $x_N^i\in\mathrm{X}_N$ 和 $z_N^i\in\mathrm{Z}_N$。令 $v_N=x_N^1-x_N^2$，$w_N=z_N^1-z_N^2$，则有

$$0=\langle\nabla J(u^1),v_N-w_N\rangle_1-\langle\nabla J(u^2),v_N-w_N\rangle_1$$

$$=\int_\Omega\Big\{(u^1-u^2,-\Delta(v_N-w_N))+$$
$$\left(\int_0^1(\partial^2G(u^2+s(u^1-u^2))/\partial u_i\partial u_j)(u^1-u^2)\,\mathrm{d}s,v_N-w_N\right)\Big\}$$

$$=\int_\Omega\Big\{(v_N+w_N,-\Delta(v_N-w_N))+$$
$$\left(\int_0^1(\partial^2G(u^2+s(u^1-u^2))/\partial u_i\partial u_j)(v_N+w_N)\,\mathrm{d}s,v_N-w_N\right)+$$
$$\left(\int_0^1(\partial^2G(u^2+s(u^1-u^2))/\partial u_i\partial u_j)(u^1-u_N^1+u_N^2-u^2)\,\mathrm{d}s,v_N-w_N\right)\Big\}$$

$$\leqslant \int_{\Omega} \{(-\Delta v_N + Bv_N, v_N) - (-\Delta w_N + Aw_N, w_N)\} + c(\|u^1 - u_N^1\|_0 + \|u^2 - u_N^2\|_0)$$

$$\leqslant - m_2 \|v_N\|_0^2 - m_1 \|w_N\|_0^2 + c(\|u^1 - u_N^1\|_0 + \|u^2 - u_N^2\|_0)。 \qquad (19)$$

因此, 当 $N \to \infty$时, v_N 和 w_N 趋向于 0,即 $x_N^1 = x_N^2$, $z_N^1 = z_N^2$, 所以 $u_N^1 = u_N^2$, 令 $N \to \infty$, 则 $u^1 = u^2$。这是定理的唯一性部分, 证毕。

参考文献:

[1] Brown K J, Lin S S. Periodically perturbed conservative systems and a global inverse function theorem[J]. Nonlinear Analysis, 1980, 4(1): 193-201.

[2] Radulescu Marius, Radulescu Sorin. Global inversion theorems and applications to differential equations[J]. Nonlinear Analysis, 1980, 4(4): 951-965.

[3] Shen Zuhe. On the periodic solution to the Newtonian equation of motion[J]. Nonlinear Analysis, 1989, 13(2): 145-150.

[4] Wu Guangrong, Huang Wenhua, Shen Zuhe. On a min-max theorem[J]. Appl Math Jcu, 1997, 12B(3): 293-298.

[5] 黄文华,沈祖和. Duffing型方程组的边界值问题的解的存在性[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(8): 875-880.

[6] 邵　荣,牛　欣,沈祖和. 非线性椭圆型边值问题解的存在性[J]. 应用数学和力学, 2003, 24(1): 89-97.

[7] Lazer A C, Landesman E M, Meyers D R. On saddle point problems in the calculus of variations, the ritz algorithm, and monotone convergence[J]. J Math Anal Appl, 1975, 52(2): 594-614.

[8] Manasevich R F. A non-variational version of a max-min principle[J]. Nonlinear Analysis, 1983, 7(6): 565-570.

[9] 黄文华,曹菊生,沈祖和. 关于非线性两点边值问题 $u'' + g(t, u) = f(t)$, $u(0) = u(2\pi) = 0$的解的存在唯一性[J]. 应用数学和力学, 1998, 19(9): 821-825.

[10] Bates P W, Castro A. Existence and uniqueness for a variational hyperbolic system without resonance[J]. Nonlinear Analysis, 1980, 4(6): 1 151-1 156.

[11] Ahmad S. An existence theorem for periodically perturbed conservative systems[J]. Mich Math JCU, 1973, 20: 385-392.

[12] Lazer A C. Application of a lemma on bilinear forms to a problem in nonlinear oscillations[J]. Proc Amer Math Soc, 1972, 33(1): 89-94.

Existence and Uniqueness for a Second Order Elliptic System without Resonance

XU Jing-jing　ZHOU Wei-can,　GUAN Yuan-hong

(Department of Mathematics, NUIST, Nanjing 210044, China)

Abstract: With Galerkin approximation procedure and minimax principle, the existence and uniqueness for the weak solution of a nonlinear elliptic system without resonance is proved.

Key words: nonlinear elliptic system; weak solution; Galerkin approximation procedure; minimax principle; critical point