

文章编号: 1000-2022(2004) 05-0700-07

物理实验中的不确定度评定

陈玉林, 叶影, 徐飞

(南京信息工程大学 物理学系, 江苏 南京 210044)

摘 要: 阐述了不确定度的定义、来源、分类及用不确定度评定测量结果的一些表示方法。分析了误差和不确定度的区别。最终给出了测量不确定度的评定。

关键词: 误差; 不确定度; 标准偏差; 置信概率

中图分类号: G424.31 **文献标识码:** A

物理学是以实验为基础的科学, 研究物理现象、了解物理特性、验证物理原理都要进行测量。测量的目的是确定被测量的值或获取测量的准确结果。被测量的值在一定条件下客观上都有确定的值, 是在被观测时本身所具有的真实大小, 它是一个理想的概念, 称之为“真值”。但是由于测量仪器的灵敏度、分辨率以及测量者观察能力的局限性、实验理论和方法的近似性、测量环境的不稳定性等原因, 造成测量值和“真值”之间不可避免地存在着或多或少的差异, 这种差异就是所谓传统意义上的误差^[1]。由于真值是永远测不到的, 所以严格意义下的测量误差也是一个不可知量, 这样就使得测量结果带有不确定性, 也就是说, 过去多年来在实验教学中使用的测量误差理论是不十分确切的, 同时世界上许多国家对误差的具体应用和计算方法不尽相同, 也影响了国际间的交流和科研成果的推广。为此, 1980 年国际计量局提出了“实验不确定度”的建议书, 1981 年国际计量大会通过了采纳“建议书”的决议。1986 年我国计量科学院发出了用不确定度作为误差指标的通知。国家技术监督局于 1991 年正式下发文件《JJF 1027—1991 测量误差及数据处理》, 决定 1992 年 10 月正式开始采用不确定度评定误差。1993 年制定了具有国际指导性的《测量不确定表示指南 (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement)》(简称指南 GUM), 为测量不确定度的统一奠定了基础, 并为测量和科学实验的发展提供了有力的保证。我国计量科学研究院于 1999 年经国家质量技术监督局批准, 发布了《JJF 1059—1999 测量不确定度评定与表示》的中国国家计量技术规范, 明确提出了测量结果的最终形式要用不确定度来进行评定与表示, 由此不确定度在我国开始进入推广使用阶段^[2]。近几年来, 很多院校已在物理实验教学中采用不确定度来评定实验结果, 但许多教材关于不确定度的评定方法和测量结果的表示不统一, 学生的疑问也较多。

本文根据《JJF 1059—1999 测量不确定度评定与表示》精神, 结合多年物理实验教学实践, 讨论测量不确定度的评定方法。

1 测量不确定度的基本概念

1.1 测量不确定度的定义

测量不确定度(简称不确定度),从词义上理解,意味着对测量结果的有效性的可疑程度或不肯定程度;从传统上理解,它是被测量真值所处范围的估计值。但是真值作为一个理想化的概念,实际上往往是难以操作的或是未知量,而可以具体操作的则是测量结果的变化。因此,现代的测量不确定度按《JJF 1059—1999 测量不确定度评定与表示》被定义为:“表征合理地赋予被测量之值的分散性、与测量结果相联系的参数”^[3]。此参数是测量结果含有的一个参数,是表明测量结果的分散程度,可以用定量的数字描述,是一个定量的概念。可用诸如标准偏差或倍数来表示,其测量结果应理解为被测量值的最佳估计值。在测量结果的完整表述中,应包括测量不确定度。测量不确定度如误差有系统误差、随机误差等一样,也由多个分量组成,并且这些分量可用统计方法、概率分布、经验判断等来评定,为一个正值。或者说不确定度是一种表征被测量值所处范围的评定,真值以一定置信概率落在测量平均值附近的一个范围内。即 $x = \bar{x} \pm u$ (置信概率 P), u 为测量不确定度,区间 $(\bar{x} - u, \bar{x} + u)$ 称置信区间。表达式的含义是被测量的真值以一定的置信概率 P 落在区间 $(\bar{x} - u, \bar{x} + u)$ 内。

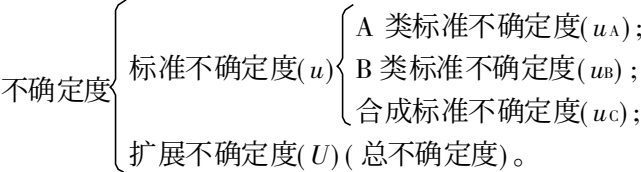
1.2 测量不确定度的来源

测量过程中有许多引起不确定度的来源,它们可能来自以下几个方面^[3]: (1) 对测量的定义不完整或不完善; (2) 实现被测量定义的方法不理想; (3) 取样的代表性不够,即被测量的样本不能完全代表所定义的被测量; (4) 对测量过程受环境影响的认识不周全,或对环境条件的测量与控制不完善; (5) 对模拟式仪器的读数存在人为偏差(偏移); (6) 测量仪器计量性能(如灵敏度、鉴别力阈、分辨率、死区及稳定性等)上的局限性; (7) 赋予计量标准的值和标准物质的值不准确; (8) 引用的数据或其他参量的不确定度; (9) 与测量方法和测量程序有关的近似性和假定性; (10) 在表面上看来完全相同的条件下,被测量重复观测值的变化。

1.3 测量不确定度的分类

用标准偏差表示测量结果的不确定度,称为标准不确定度,以 u 表示。以标准偏差的倍数表示的不确定度称为扩展不确定度或称为展伸不确定度,也可称为总不确定度,以 U 表示,是指定义测量结果区间的量,即被测量的值以某一可能性(即置信水平)落入该区间中。扩展不确定度表明了具有较大置信概率的区间的半宽度。不确定度通常由多个分量组成,对每一分量均要评定其标准不确定度。标准不确定度依其评定方法分为 A、B 两类:能用对观测列进行统计分析方法计算者,称为 A 类标准不确定度,或称为标准不确定度的 A 类算法,以 u_A 表示;不同于 A 类的其他方法计算者,称为 B 类标准不确定度,或称为标准不确定度的 B 类算法,以 u_B 表示。各标准不确定度分量的合成称为合成标准不确定度,以 u_C 表示。

不确定度具体分类如下^[4]:



2 用测量不确定度评定测量结果的方法

2.1 直接测量结果不确定度的评定

直接测量是指不必测量与被测量有函数关系的其他量, 而能直接得到被测量值的测量方法。也就是说由一组操作即可获得被测量值, 不论这组操作复杂程度如何。直接测量法的特点是被测量值可以直接从计量器具中得出。例如用游标卡尺测量物体的长度、用天平称量物体的质量等。

2.1.1 单次直接测量的标准不确定度的评定

在物理实验中, 常常由于条件不许可, 或测量准确度要求不高等原因, 对一个物理量的直接测量只进行了一次。这时可以用仪器误差或仪器的灵敏度及最小分度值作为极限误差, 也可根据实际情况作具体估计。一般记作: $u(x) = \Delta/k$, k 为置信系数, Δ 为极限误差。

2.1.2 多次直接测量结果的标准不确定度的评定

(1) A 类标准不确定度评定

对直接测量来说, 如果在相同条件下对某物理量 X 进行了 n 次等精度独立测量, 其测量值分别为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 用 $\bar{x}$ 来表示平均值, 则

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1)$$

根据误差的统计理论, 在一组 n 次测量的数据中, 算术平均值 $\bar{x}$ 最接近于真值, 称为测量的最佳值或真值。在这种情况下, $s(x_i)$ 为单次测量的实验标准偏差, 由贝塞尔公式计算得到

$$s(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (2)$$

上式说明, $s(x_i)$ 可以通过各次测量值 x_i 与最佳值 $\bar{x}$ 之差来进行计算。 $s(\bar{x})$ 为平均值的实验标准偏差, 其值为

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x_i)}{n}. \quad (3)$$

由于多次测量的平均值比一次测量值更准确, 随着测量次数的增多, 平均值收敛于期望值。因此, 通常以样本的算术平均值 $\bar{x}$ 作为被测量值的估计(即测量结果), 以平均值的实验标准偏差 $s(\bar{x})$ 作为测量结果的标准不确定度, 即 A 类标准不确定度。所以

$$u_A(\bar{x}) = s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (4)$$

当测量次数 n 不是很少时, 对应的置信概率为 $p = 0.683$ 。当测量次数 n 较少时(教学实验测量中均为有限次测量, 一般不超过 10 次, 且 $5 \leq n \leq 10$), 这时测量结果偏离正态分布, 则 A 类不确定度分量 $u_A(\bar{x})$ 由 $s(\bar{x})$ 乘以因子 t_p 求得。即

$$u_A(\bar{x}) = t_p \cdot s(\bar{x}) = \frac{t_p}{n} s(x_i) = t_p \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (5)$$

t_p 为与一定置信概率相联系的置信因子, 可由表 1 查出^[5]。

表 1 t_p 因子表
Table 1 t_p factor

p	测量次数 n											
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	∞
0.683	1.84	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06	1.03	1.02	1.00
0.950	12.70	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.09	2.05	1.96

(2) B 类标准不确定度评定

由于 B 类不确定度在测量范围内无法用统计方法评定, 一般可根据经验或其他有关信息进行估计。在大学物理实验教学中, 一般只要考虑由仪器误差影响及测试条件不符合要求而引起的附加误差等几方面因素。在某些情况下, 有的依据仪器说明书或检定书, 有的依据仪器的准确度等级, 有的则粗略地依据仪器的分度或经验, 从这些信息可以获得该项系统误差的极限 Δ (有的标出容许误差或示值误差), 而不是标准不确定度 $u_B(x)$ 。它们之间的关系为

$$u_B(x) = \frac{\Delta}{C}。$$

(6)

式中, C 为置信概率 $p=0.683$ 时的置信系数。对仪器的误差服从正态分布、均匀分布, C 分别为 3、 $\sqrt{3}$ 。在缺乏信息的情况下, 对大多数普通物理实验测量可认为一般仪器误差概率分布函数服从均匀分布。物理实验中 Δ 主要与未定的系统误差有关, 而未定系统误差主要是来自于仪器误差 $\Delta_{\text{仪}}$, 用仪器误差 $\Delta_{\text{仪}}$ 代替 Δ , 所以(6)式可写为

$$u_B(x) = \frac{\Delta_{\text{仪}}}{3}。$$

(7)

常用仪器的 $\Delta_{\text{仪}}$ 值见表 2^[5]。

表 2 常用仪器的 $\Delta_{\text{仪}}$ 值
Table 2 The value of $\Delta_{\text{仪}}$ in equipment

仪器名称	$\Delta_{\text{仪}}$	仪器名称	$\Delta_{\text{仪}}$
米尺	0.5 mm	计时器	仪器最小读数(1 s, 0.1 s, 0.01 s)
卡尺	0.05 mm 或 0.02 mm	物理天平	0.05 g
千分尺	0.01 mm	电桥	$K \% \cdot R$ (K 为准确度或级别, R 为示值)
分光计	1 或 30 ′ (最小分度值)	电位差计	$K \% \cdot V$ (K 为准确度或级别, V 为示值)
显微镜	0.005 mm	电阻箱	$K \% \cdot R$ (K 为准确度或级别, R 为示值)
各类数字仪表	仪器最小读数	电表	$K \% \cdot M$ (K 为准确度或级别, M 为量程)

(3) 合成标准不确定度评定

对于受多个误差来源影响的某直接测量量, 被测量量 X 的不确定度可能不止一项, 设其有 k 项, 且各不确定度分量彼此独立, 其协方差为零, 则用方和根方式合成, 称合成标准不确定度, 用符号 “ $u_C(x)$ ” 表示, 则

$$u_C(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^k u^2(x_i)}。$$

(8)

式中, $u(x_i)$ 可以是 A 类评定标准不确定度, 也可以是 B 类评定标准不确定度或两者都有。

评价测量结果, 有时也写出相对不确定度, 相对不确定度常用百分数表示

$$E_x = \frac{u_C}{x} \times 100 \%。$$

(9)

2.2 间接测量量不确定度的评定

在科学实验和生产实践中,常有许多量不能进行直接测量,或者进行直接测量有困难,或者直接测量难以保证测量精度,因而要用到间接测量。所谓间接测量是指通过测量与被测量有函数关系的其他量,然后由函数关系计算得到被测量的操作。事实上,绝大多数测量都是间接测量。

对于间接测量量 Y (输出量),由 m 个相应各直接测量量 $X_1, X_2, \dots, X_m$ (输入量)通过函数关系 f 来确定,一般可表示为 $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 。式中 Y 的估计值为 y , 输入量 X_i 的估计值为 x_i , 则有 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 。则 Y 的最佳估计值取为 $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$ 。又设 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 的合成标准不确定度为 $u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_m)$ 。

当全部直接测量量 X_i 是彼此独立或不相关时,估计值 y 的合成标准不确定度 $u_c(y)$ 为

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 u^2(x_2) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 u^2(x_m)} \quad (10)$$

式中, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 是函数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 在 $X_i = x_i$ 时的偏导数。这些偏导数称为灵敏系数,用符号 c_i 表示,即 $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, 它表示了估计值 y 随输入估计值 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 的变化而变化的程度。

当一些输入量 X_i 之间明显相关时,就必须考虑其相关性。即使两个量 X_i, X_j 无真正关联,但在得到它们的估计值的过程中,某些因素可能使它们估计值 x_i, x_j 之间有某种关联,使得在不确定处理时,仍要考虑它们之间的相关性。此时估计值 y 的合成标准不确定度 $u_c(y)$ 为

$$\begin{aligned} u_c(y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) u(x_i, x_j)} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) u(x_i, x_j)} \quad (11) \end{aligned}$$

式中, x_i, x_j 是 X_i, X_j 的估计, $u(x_i, x_j)$ 是 x_i, x_j 估计协方差,且 $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ 。 x_i, x_j 的相关程度可按估计相关系数 $r(x_i, x_j)$ 表示为

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i) u(x_j)} \quad (12)$$

2.3 扩展不确定度的评定

扩展不确定度分为两种,即 U 与 U_p 。前者为标准偏差的倍数,后者为具有概率 p 的置信区间的半宽。它们的含义不同,必要时应采用符号下标加以区别。

扩展不确定度 U 由合成标准不确定度 u_c 乘以包含因子 k 得到

$$U = k u_c \quad (13)$$

测量结果可表示为 $Y = y \pm U$, y 是被测量 Y 的最佳估计值,被测量 Y 的可能值以较高的置信水准落于区间 $[y - U, y + U]$ 内,即 $y - U \leq Y \leq y + U$ 。

对于任一给定的置信概率或置信水准 p , 扩展不确定度记为 U_p , 表示为

$$U_p = k_p u_c(y) \quad (14)$$

2.4 测量不确定度的报告与表示

完整的测量结果含有两个基本量,一是被测量 Y 的最佳估计值 y , 一般由数据测量列的算术平均值给出,另一个就是描述该测量结果分散性的量,即测量不确定度。它实际上是测量过

程中来自于测量设备、环境、人员、测量方法及被测对象所有的不确定度因素的集合。一般以合成标准不确定度 $u_c(y)$ 、扩展不确定度 $U(y)$ (或 $U_p(y)$) 给出。

报告测量不确定度有两种方式, 一类是直接用(未扩展的)合成标准不确定度, 另一类是使用扩展不确定度。

使用合成标准不确定度的适用范围: (1) 基础计量学研究; (2) 基本物理常量测量; (3) 复现国际单位制的国际比对。除上述指明的 3 种情况及某些特殊要求情况以外, 一般皆使用扩展不确定度 U 或 U_p 。

3 测量不确定度与误差的区别及联系

误差与不确定度是两个不同的概念, 不应混淆或误用。误差是不确定度表达的理论基础, 不确定度的 A 类分量和 B 类分量与偶然误差和系统误差之间并不存在简单的一一对应关系, A、B 两类分量分别都可能包含偶然误差和系统误差。因此, 简单地把 A 类不确定度对应于随机误差导致的不确定度, 把 B 类不确定度对应于系统误差导致的不确定度的做法是错误的。

测量不确定度是说明测量分散性的参数, 由人们经过分析和评定得到, 因而与人们的认识程度有关。测量结果可能非常接近真值(即误差很小), 但由于认识不足, 评定得到的不确定度可能较大。也可能测量误差实际上较大, 但由于分析估计不足, 给出的不确定度却偏小。因此, 在进行不确定度分析时, 应充分考虑各种影响因素, 并对不确定度的评定加以验证。测量误差与测量不确定度的主要区别见表 3^[3]。

表 3 测量误差和测量不确定度的区别

Table 3 The difference between measurement error and uncertainty		
序号	测量误差	测量不确定度
1	有正号或负号的量值, 其值为测量结果减去被测量的真值	无符号的参数, 用标准或标准偏差的倍数或置信区间的半宽表示
2	表明测量结果偏离真值	表明被测量值的分散性
3	客观存在, 不以人的认识程度而改变	与人们对被测量、影响量及测量过程的认识有关
4	由于真值未知, 往往不能准确得到, 当用约定真值代替真值时, 可以得到其估计值	可以由人们根据实验、资料、经验等信息进行评定, 从而可以定量确定, 评定方法有 A、B 两类
5	按性质可分为随机误差和系统误差两类, 按定义, 随机误差和系统误差都是无穷多次测量情况下的理想概念	在确定度分量评定时, 一般不必区分其性质, 若需要区分时应表述为“由随机效应引入的不确定度分量”和“由系统效应引入的不确定度分量”
6	已知系统误差的估计值时可以对测量结果进行修正, 得到已修正的测量结果	不能用不确定度对测量结果进行修正, 在已修正测量结果的不确定度中应考虑修正不完善而引入的不确定度

4 结 语

测量不确定度是一门基础学科, 随着人们认识的加深, 将会得到越来越广泛的应用, 如何评定尤其重要, 图 1 简明地表示出测量不确定度评定的全部流程。

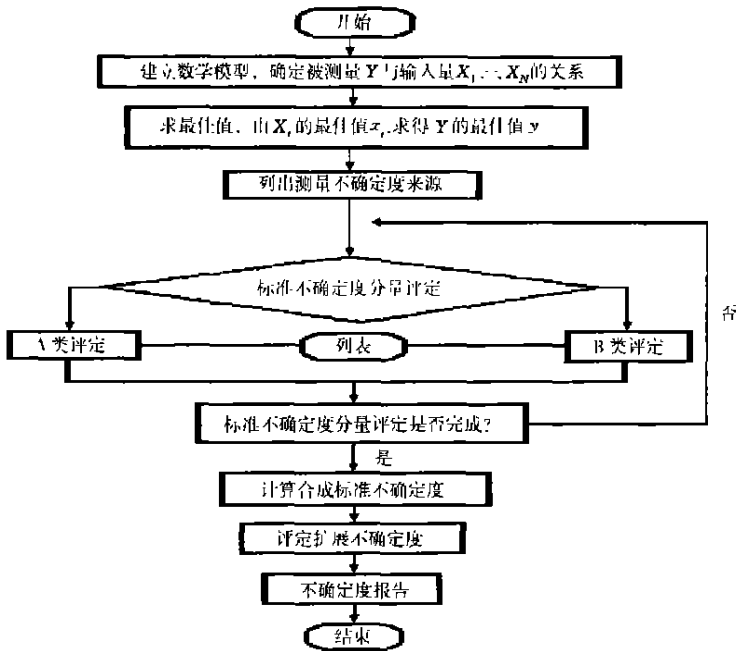


图 1 测量不确定度评定的总流程

Fig. 1 Whole flow chart of uncertainty evaluation

参考文献:

[1] 陈瑞芬, 顾河清, 陈玉林. 大学物理实验[M]. 南京: 河海大学出版社, 2002.

[2] 阿不都热苏力·阿不都热西提, 地力穆拉提·伊明. 不确定度在物理实验中的应用[J]. 新疆大学学报(自然科学版), 2002, 19(1): 22.

[3] 国家质量技术监督局计量司. 测量不确定度评定与表示指南[M]. 北京: 中国计量出版社, 2000: 19-24.

[4] 刘智敏. 误差与不确定度题解[M]. 北京: 中国计量出版社, 2000.

[5] 阿不都热苏力, 哈力达. 普通物理实验的不确定度评定[J]. 新疆师范大学学报(自然科学版), 2001, 20(4): 35-36.

Uncertainty Evaluation in Physical Experiments

CHEN Yu-lin, YE Ying, XU Fei

(Department of Physics, NUIST, Nanjing 210044, China)

Abstract: In this paper, the relevant concepts and sources of uncertainty, and the method to evaluate the uncertainty of measurement are introduced. The difference between measurement error and uncertainty is also defined. In the end, the whole evaluation of uncertainty in measurement is given.

Key words: error; uncertainty; standard error; level of confidence