第 27 卷第 1 期 南京气象学院学报 Vol. 27 No. 1
2004 年 2 月 Journal of Nanjing Institute of Meteorology Feb. 2004

文章编号: 1000-2022(2004)01-0128-03

连续 Domain 的一个刻划

周立涛
(南京气象学院 数学系, 江苏 南京 210044)

摘 要: 弱逼近元在完备格中有许多重要的性质, 对于刻划连续格、完全分配格起着重要的作用。在 Domain 中引入弱逼近元的概念, 研究了弱逼近元的一个重要性质, 从而得到连续 Domain 的一个充要条件。最后, 以 Scott 开滤子为基础, 得到了连续 Domain 的一个刻划定理。

关键词: Domain; dcpo; 弱逼近元
中图分类号: O153. 1; O189. 1 文献标识码: A

Domain 是现代计算机专家与格上拓扑学学者十分关心的数学结构, Domain 理论与计算机科学有着密切的联系, 它是研究理论计算机的一个重要工具。由于 Domain 理论容易与代数格、完全分配格以及 Scott 拓扑、Lawson 拓扑等联系起来, 因此, 它在范畴论、Topos 理论、拓扑代数及模糊数学领域有着十分广泛的应用。逼近关系作为 Domain 理论中的一个重要结构, 具有很多实际意义。文献[1]利用逼近关系给出了连续格的一个刻划, 并应用到完全分配格上。受到文献[1]的启发, 在 Domain 中引入弱逼近元的概念, 讨论了它在 Domain 中的性质以及对 Domain 连续性的刻划。最后, 基于 Scott 开滤子, 得到连续 Domain 的一个刻划定理。从而推广了文献[1]的结果。

设 $(P, \leq)$ 是偏序集, $S \subseteq P$, $a \in P$, 规定 $\uparrow a = \{x \in P: a \leq x\}$, $\uparrow S = \cup\{\uparrow a: a \in S\}$, 当 $S = \uparrow S$ 时, 称 S 为上集。

设 $(P, \leq)$ 是偏序集, $A \subseteq P$。若 $A \neq \cong$, 并且对任意 $a, b \in A$, 存在 $c \in A$, 使得 $a \leq c$ 且 $b \leq c$, 则称 A 是 P 的定向子集。若 A 的上确界存在, 则称为 A 的定向并, 记作 $\vee^{\uparrow} A$。对任意 $a, b \in A$, 存在 $c \in A$, 使得 $c \leq a$ 且 $c \leq b$, 则称 A 是 P 的滤子化子集。若 A 是滤子化的上集, 则称 A 是 P 的滤子。

设 $(P, \leq)$ 是偏序集。若对于 P 的任意定向子集 A 有上确界 $\vee^{\uparrow} A$, 则称 P 为定向完备偏序集, 记作 dcpo。

设 D 为 dcpo, $x, y \in D$。若对于 D 的任意定向子集 A, 且 $y \leq \vee^{\uparrow} A$, 存在 $a \in A$, 使得 $x \leq a$, 则称 x 逼近于 y, 记作 $x \ll y$, 规定 $\Downarrow x = \{y \in D: y \ll x\}$, $\Uparrow x = \{y \in D: x \ll y\}$。

定义 1[2] 设 D 为 dcpo, 称 D 为连续的, 若(1)对任意 $x \in D$, $\Downarrow x$ 是 D 中的定向集; (2)对

收稿日期: 2003-04-10; 改回日期: 2003-09-08
基金项目: 江苏省教育厅自然科学研究指导性计划项目(01KJD110002)
作者简介: 周立涛(1975-), 男, 山东陵县人, 硕士, 研究方向: 格上拓扑学. E-mail: zhoulitao@etang.com.

任意 $x \in D$, $x = \bigvee^{\uparrow} \Downarrow x$。则连续的 dcpo 称为连续 Domain。

定义 2　设 D 为 dcpo, $x \in D$ 称为弱逼近元, 若 $\Downarrow x$ 为定向集且 $x = \bigvee^{\uparrow} \Downarrow x$。

令 $B(D)$ 表示 D 的全体弱逼近元的集。

设 D 为 dcpo, 则 D 是连续 Domain 当且仅当对任意 $x \in D$, x 为弱逼近元。

设 D 为 dcpo, 称 D 上的关系 $\ll$ 满足插入条件, 若 $a \ll b$, $a, b \in D$, 则存在 $c \in D$, 使得 $a \ll c \ll b$。

定理 1　设 D 为 dcpo, 对任意 $x \in D$, $\Downarrow x$ 是 D 中的定向集, 且关系 $\ll$ 满足插入条件, 则对任意 $x \in D$, 存在唯一的弱逼近元 $B(x)$, 满足以下条件:

(1) $\Downarrow B(x) = \Downarrow x$;

(2) 对任意 $y \in D$, 若 $\Downarrow y = \Downarrow x$, 则 $y \geq B(x)$。

证明　对任意 $x \in D$, 令 $B(x) = \bigvee^{\uparrow} \Downarrow x$。现证明 $B(x)$ 满足条件(1)、(2), 且 $B(x) \in B(D)$。

由 $B(x) \leq x$ 知, $\Downarrow B(x) \subseteq \Downarrow x$, 设 $a \in \Downarrow x$, 由 $\ll$ 满足插入条件知, 存在 $b \in D$, 使得 $a \ll b \ll x$, 由定义 2 得, $b \leq B(x) = \bigvee^{\uparrow} \Downarrow x$, 再由 $a \ll b$ 知, $a \ll B(x)$, 从而, $\Downarrow x \subseteq \Downarrow B(x)$, 所以 $\Downarrow B(x) = \Downarrow x$。即 $B(x)$ 满足条件(1)。设 $\Downarrow y = \Downarrow x$, 则 $y \geq \bigvee^{\uparrow} \Downarrow y = \bigvee^{\uparrow} \Downarrow x = B(x)$。即 $B(x)$ 满足条件(2)。从而定理得证。

定理 2　设 D 为 dcpo, 对任意 $x \in D$, $\Downarrow x$ 是 D 中的定向集, 则 D 为连续 Domain 当且仅当 D 满足条件:

(1) 关系 $\ll$ 满足插入条件;

(2) $x, y \in D$, $x \neq y \Rightarrow \Downarrow x \neq \Downarrow y$。

证明　必要性显然。

充分性, 设 D 满足条件(1)、(2), 由定理 1 知, 对任意 $x \in D$, 存在唯一的弱逼近元 $B(x)$, 使得 $\Downarrow B(x) = \Downarrow x$, 由条件(2) 知, $x = B(x)$, 从而 D 中的任一元都是弱逼近元, 由定义 2 得, D 为连续 Domain。

定义 3[3]　设 D 为 dcpo, $A \subseteq D$。若 A 是上集且对于 D 的任意定向子集 S, 当 $\bigvee^{\uparrow} S \in A$ 时, 有 $S \cap A \neq \cong$, 则称 A 是 Scott 开集。

定义 4　设 D 为 dcpo, $\Phi \subseteq 2^D$ 是 D 的一族滤子化集的集族, Φ 称为强分离 D 的点, 如果 $a, b \in D$, $a \not\leq b$, 就存在 $A \in \Phi$, 使得, $a \in A$, 且存在 A 的极大下界 x 使 $x \not\leq b$。

定理 3　设 D 为 dcpo, 对任意 $x \in D$, $\Downarrow x$ 是 D 的定向集, 则 D 为连续 Domain 当且仅当 D 中的 Scott 开滤子强分离 D 的点。

证明　必要性, 设 D 为连续 Domain, $a, b \in D$, $a \not\leq b$, 则存在 $c \in D$, $c \ll a$, $c \not\leq b$, 又 D 为连续 Domain, 则关系 $\ll$ 满足插入条件, 故存在 $x_1 \in D$, $c \ll x_1 \ll a$。同理, 存在 $x_2 \in D$, $c \ll x_2 \ll x_1$, …, 这样下去, 得到一列 $\{x_n\}$, 满足: $c \ll x_{n+1} \ll x_n \ll \cdots \ll a$, $n = 1, 2, \cdots$, 令 $V = \bigcup \{\Uparrow x_n : n \in \mathbf{N}\}$, 则易证, V 是一个 Scott 开滤子, 且由佐思引理(Zorn 's Lemma), V 有一个极大下界 $m_c \geq c \not\leq b$, $a \in V$, 所以 Scott 开滤子强分离 D 的点。

充分性, 设 D 满足条件, $a, b \in D$, $a \not\leq b$, 由已知得, 存在 Scott 开滤子 $V \in \sigma(D)$, 且 V 有一个极大下界 x, 使得 $a \in V$, $x \not\leq b$, 这时有 $x \ll a$, 事实上, 设 $A \subseteq D$ 为任一非空定向集, $a \leq \bigvee^{\uparrow} A$, 由 $a \in V$, $V = \uparrow V$ 知, $\bigvee^{\uparrow} A \in V$, 从而由 Scott 开集的定义知, $A \cap V \neq \cong$。取 $d \in A \cap V$, 则 $d \geq x$, 所以 $x \ll a$, 由 a 与 b 的任意性知, $b = \bigvee^{\uparrow} \Downarrow b$。故 D 为连续 Domain。

致谢: 感谢导师王戈平教授的悉心指导!

参考文献:

[1] 赵东升. 连续格与完全分配格的几个特征[J]. 数学季刊, 1990, 5(1-2): 162-165.

[2] Abrmsky S, Jung A. Domain Theory[M]. Oxford: Oxford University Press, 1994: 1-168.

[3] 郑崇友, 樊 磊, 崔宏斌. FRAME 与连续格[M]. 北京: 首都师范大学出版社, 1994: 44-207.

A Characterization of Continuous Domains

ZHOU Li-tao

(Department of Mathematics, NIM, Nanjing 210044, China)

Abstract: The weak approximating elements of complete lattices have a few significant properties, and play an important role in the characterizations of continuous lattices and completely distributive lattices. In this paper, the concept of weak approximating elements is introduced and an important property of weak approximating elements is studied, then a sufficient condition of continuous domain is obtained. At last, a characterization of continuous domains is given by means of the Scott open filters.

Key words: domain; dcpo; weak approximating element