

文章编号: 1000-2022(2003) 03-0419-05

非线性平流方程计算稳定性对初值的依赖性研究

朱杰顺, 周伟灿
(南京气象学院 数学系, 江苏 南京 210044)

摘 要: 对一维平流方程向前差格式的一个计算不稳定特例进行了讨论, 给出了四个命题, 并得出结论: 在一定的条件下, 可以对初值稍加改变, 使其在 x 轴一侧分布而达到计算稳定, 从而改进并修正了已有的相关结论。

关键词: 非线性平流方程; 计算稳定性; 初值

中图分类号: P456.7 **文献标识码:** A

自 Phillips^[1] 在正压涡度方程的数值求解中首先发现非线性计算不稳定性后, 国内外诸多学者对此展开了研究, 并提出了一些计算稳定性较好的计算格式。Lilly^[2] 和 Arakawa^[3] 分别提出了 Lilly 格式和 Arakawa 格式, 这两种格式具有瞬时能量守恒性, 稳定性较好, 因而在数值预报中得到过广泛的应用。曾庆存等^[4] 和季仲贞等^[5-6] 提出了“隐式完全能量守恒差分方法”和“显式完全能量守恒差分方法”, 随着计算条件的不断改进, 相信它们会在实际应用中得到检验。与此同时, 曾庆存等^[7-8] 指出计算稳定性和差分算子能量守恒性紧密相关, 对不满足差分算子能量守恒性的差分格式总能举出计算不稳定的特例。近年来, 林万涛等^[9-10] 利用 Hirt 启示性判别法给出了各种格式计算稳定性的必要条件。另外, 对于那些计算不稳定的特例曾有人尝试寻找使其变为稳定的方法。Fornberg^[11] 在研究一维非线性平流方程的 leap-frog 格式和 Crank-Nicolson 格式计算稳定性时, 通过数值试验发现当初分布在零值附近摆动时易出现计算不稳定, 因而提出对自变量作一变换, 使解“远离”零值, 以达到计算稳定。而文献[12]曾尝试改进文献[11]的结论, 对文献[7]中所举一维平流方程的 leap-frog 格式和向前差格式计算的不稳定特例进行了研究, 提出对于该特例将初分布稍加改变, 使其在 x 轴一侧分布就能达到计算稳定的目的。本文继续了这方面的工作, 得出了几个有益的结论。

1 命题介绍与讨论

一维非线性平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

给出(1)式的向前差分格式

收稿日期: 2002-09-13; 改回日期: 2002-11-19
基金项目: 国家重点基础研究发展规划项目(G1998040907)
作者简介: 朱杰顺(1980-), 男, 江苏姜堰人, 硕士生.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0. \quad (2)$$

其中 τ, h 分别为计算所用时间和空间网格步长。

文献[7]给出了(2)式的一个计算不稳定的特例,不妨写为引理。

引理 任给 $\epsilon_0 > 0$, (2) 式对初条件

$$\{u_j^0\} = \{\dots, 0, \epsilon_0, -\epsilon_0, 0, \epsilon_0, -\epsilon_0, 0, \dots\}. \quad (3)$$

是计算不稳定的。

引理的证明见文献[7, 12]。

对这个不稳定的特例, 文献[12]提出了一个使其计算变得稳定的方法, 并给出了两个不太严格的定理。下面对这个特例给出四个相对较严格的命题, 记为定理 1 ~ 定理 4。

定理 1 任给 $\epsilon_0 > 0, a < \epsilon_0 (a > 0)$, 则(2) 式对初分布

$$\{u_j^0\} = \{\dots, 0, a + \epsilon_0, a - \epsilon_0, 0, a + \epsilon_0, a - \epsilon_0, 0, \dots\}. \quad (4)$$

计算不稳定。

定理 2 任给 $\epsilon_0: 0 < 2\lambda\epsilon_0 < 1$, 对于任意 $a: \epsilon_0 \leq a \leq \frac{1}{2\lambda}$, (2) 式对初分布(4) 计算稳定。

定理 3 任给 $a: 0 < a < \frac{1}{2\lambda}, \forall \epsilon_0: -a \leq \epsilon_0 \leq a$, (2) 式对于初分布(4) 计算稳定。

推论 任给 $\epsilon_0: 0 < 2\lambda\epsilon_0 < 1$, 对于任意 $a: -\frac{1}{2\lambda} \leq a \leq -\epsilon_0$, (2) 式对初分布(4) 计算稳定。

定理 4 任给 a : 当 $a\lambda > 3$, 总存在 $0 < \epsilon_0 < a$, 使(2) 式对初分布(4) 计算不稳定。

讨论如下:

(1) 定理 1 说明对于初分布(4) 式, 在 $a > 0$ 的前提下(2) 式稳定的必要条件是: $a \geq \epsilon_0$, 即初分布在 x 轴的一侧。但是要强调的是 $a \geq \epsilon_0$ 并不是计算稳定的充要条件, 可以举出反例说明这一点: 令 $\lambda = 0.5, a = 5, \epsilon_0 = 1$ 。

事实上, 由下文的(14) 式可得 $u_{j_1}^{n+1} = u_{j_1}^n - 0.5u_{j_1}^n(10 - u_{j_1}^n)$, 且 $u_{j_1}^0 = 6$ 。即 $u_{j_1}^{n+1} = u_{j_1}^n \frac{(u_{j_1}^n - 8)}{2}$ 且 $u_{j_1}^0 = 6$ 。

易证: $n \rightarrow \infty$ 时, $u_{j_1}^{n+1} \rightarrow +\infty$ 。

另外, 定理 4 可算是对这一点的理论说明。

(2) 定理 2、定理 3 推论实际上是对文献[12] 中定理 1、定理 3 的修正, 它们给出了计算稳定的一个充分而非必要条件, 可以看出对于满足条件的 ϵ_0 是不多的。另外, 对定理 2 还可以进一步证明: $\epsilon_0 \neq a$ 时, $\epsilon_n \rightarrow -a (n \rightarrow +\infty)$; $\epsilon_0 = a$ 时, $\epsilon_n \equiv a$ 。

2 定理证明

为了下文的表述简洁, 先作如下推导。

(2) 式可写为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda u_j^n (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n). \quad (5)$$

其中 $\lambda = \frac{\tau}{2h}, \lambda > 0$ (下文同)。

对于(4) 式截取如下一段

$$j_0 \quad j_1 \quad j_2 \quad j_3 \quad j_4 \quad j_5 \quad j_6$$

$$n = 0 \quad \dots, \quad 0, \quad a + \epsilon_0, a - \epsilon_0, 0, \quad a + \epsilon_0, a - \epsilon_0, 0, \dots. \quad (6)$$

u 在 $(n\tau, j_i h)$ 点的值记为 $u_{j_i}^n (i = 1, 2, \dots, 6)$ 。

那么易于得到

$$u_{j_i}^n = 0 (i = 0, 3, 6; n = 1, 2, \dots), \quad (7)$$

$$u_{j_1}^{n+1} = u_{j_1}^n - \lambda u_{j_1}^n (u_{j_2}^n - u_{j_0}^n) = u_{j_1}^n - \lambda u_{j_1}^n u_{j_2}^n = a + \epsilon_{n+1}, \quad (8)$$

$$u_{j_2}^{n+1} = u_{j_2}^n - \lambda u_{j_2}^n (u_{j_3}^n - u_{j_1}^n) = u_{j_2}^n + \lambda u_{j_1}^n u_{j_2}^n = a - \epsilon_{n+1}, \quad (9)$$

$$u_{j_4}^{n+1} = u_{j_1}^{n+1},$$

$$u_{j_5}^{n+1} = u_{j_2}^{n+1}.$$

其中

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n - \lambda(a^2 - \epsilon_n^2) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (10)$$

由(8) + (9)得

$$u_{j_1}^{n+1} + u_{j_2}^{n+1} = u_{j_1}^n + u_{j_2}^n = \dots = u_{j_1}^0 + u_{j_2}^0 = 2a. \quad (11)$$

则(8), (9)可化为

$$u_{j_1}^{n+1} = u_{j_1}^n - \lambda u_{j_1}^n (2a - u_{j_1}^n) \quad \text{且} \quad u_{j_1}^0 = a + \epsilon_0, \quad (12)$$

$$u_{j_2}^{n+1} = u_{j_2}^n + \lambda u_{j_2}^n (2a - u_{j_2}^n) \quad \text{且} \quad u_{j_2}^0 = a - \epsilon_0. \quad (13)$$

式中 $n = 0, 1, 2, \dots$ 。

2.1 定理1证明

由(10)式知 $\epsilon_{n+1} + a = (\epsilon_n + a)[1 + \lambda(\epsilon_n - a)]$, 又 $\epsilon_0 > a > 0$, 则可得 $\epsilon_1 > a$ 。由归纳法得 $\epsilon_{n+1} > \epsilon_n > \dots > \epsilon_0 > a$, 所以

$$\epsilon_{n+1} + a > (\epsilon_n + a)[1 + \lambda(\epsilon_n - a)] > \dots > (\epsilon_0 + a)[1 + \lambda(\epsilon_0 - a)]^n.$$

所以

$$\epsilon_{n+1} \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty).$$

定理1证毕。

2.2 定理2证明

由(8) ~ (10)式知, 只要讨论 ϵ_{n+1} 的有界性。

由(10)式得

$$\epsilon_{n+1} + a = (\epsilon_n + a)[1 + \lambda(\epsilon_n - a)].$$

其中 $n = 0, 1, 2, \dots$ 。又 $\epsilon_0 < a < \frac{1}{2\lambda}$, 所以

$$-a \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_0 \leq a.$$

由归纳法知: $n = k$ 时,

$$-a \leq \epsilon_k \leq \epsilon_{k-1} \leq \dots \leq \epsilon_0 \leq a.$$

当 $n = k+1$ 时, 易知 $0 \leq 1 + \lambda(\epsilon_k - a) < 1$, 故 $0 \leq \epsilon_{k+1} + a \leq \epsilon_k + a$, 所以 $-a \leq \epsilon_{k+1} \leq \epsilon_k \leq \dots \leq \epsilon_0 \leq a$, 则 $\epsilon_n \leq a$ 。定理2证毕。

2.3 定理3证明

与定理2的证明类似, 略去。另外, 其推论也易验证。

2.4 定理4证明

不妨取 $\epsilon_0 = \frac{a}{2}$, 则由(12)式易得

$$u_{j_1}^{n+1} = u_{j_1}^n - \lambda u_{j_1}^n (2a - u_{j_1}^n) = u_{j_1}^n (1 - 2a\lambda + \lambda u_{j_1}^n) \text{ 且 } u_{j_1}^0 = \frac{3a}{2}. \quad (14)$$

易得

$$u_{j_1}^1 = \frac{3}{2}a(1 - \frac{1}{2}a\lambda),$$

$$u_{j_1}^2 = \frac{3}{2}a(1 - \frac{1}{2}a\lambda)[1 - 2a\lambda + \frac{3}{2}a\lambda(1 - \frac{1}{2}a\lambda)].$$

易证 $a\lambda > 3$ 时, $u_{j_1}^2 > 2a$ 。

由归纳法易于证明

$$u_{j_1}^n > u_{j_1}^{n-1} > \dots > u_{j_1}^2 > 2a \quad (n \geq 2). \quad (15)$$

由 (14)、(15) 式可知

$$u_{j_1}^{n+1} > (1 - 2a\lambda + \lambda u_{j_1}^2) u_{j_1}^n > \dots > (1 - 2a\lambda + \lambda u_{j_1}^2)^{n-1} u_{j_1}^2.$$

显然 $u_{j_1}^{n+1} \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$ 。定理 4 证毕。

3 结 论

文献[11]中指出,当初分布在零值附近摆动时易出现计算不稳定,并且通过数值试验进行了验证。而从本文定理 1 可以看到如果初分布(6)分布在 x 轴两侧,不管一侧的值如何之小,格式(2)总是计算不稳定的。

文献[11]中对这种计算不稳定提出的解决办法就是对自变量作一变换,使解远离零值。而本文结合文献[12]的思想提出在有些情况下只要通过将初值移至 x 轴的一侧,就能保证计算稳定,而不必远离零值,从这个角度看可以说改进了文献[11]的结论。

另外,本文实际上也说明了非线性差分格式的稳定性问题的初分布有关。然而,从本文可以看出这样的方法还存在很多缺陷:首先,不是所有的形如初分布(6)的问题,格式(2)都稳定,并且满足定理充分条件极为苛刻;其次,如何从满足初分布(6)的解推出满足初分布(4)的解并不太容易,还有待进一步研究。

最后需要说明的是,对比文中定理 1 与文献[12]可知,文献[12]把计算稳定性的必要条件当成了充分条件,实际上是不符合事实的。

参考文献:

- [1] Phillips N A. The Atmosphere and the Sea in Motion[M]. New York: Rockefeller Institute, 1959: 501-504.
- [2] Lilly D K. On the computational stability of numerical solutions of time-dependent nonlinear geophysical fluid dynamics problems[J]. Mon Wea Rev, 1965, 93(1): 11-26.
- [3] Arakawa A. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: Two-dimensional incompressible flow, Part [J]. J Comput Phys, 1966, 1(1): 119-143.
- [4] 曾庆存, 季仲贞, 袁重光. 原始方程差分格式的设计[C]. 第二次全国数值天气预报会议论文集. 北京: 科学出版社, 1980: 300-313.
- [5] 季仲贞, 曾庆存. 发展方程差分格式的构造和应用[J]. 大气科学, 1982, 6(1): 88-94.
- [6] 季仲贞, 王 斌. 再论发展方程差分格式的构造和应用[J]. 大气科学, 1991, 15(2): 1-10.
- [7] 曾庆存, 季仲贞. 发展方程的计算稳定性问题[J]. 计算数学, 1981, 3(1): 79-86.
- [8] 曾庆存, 季仲贞. 关于非线性计算稳定性的若干问题[J]. 力学学报, 1981, 13(3): 209-216.
- [9] 林万涛, 季仲贞, 王 斌等. 一种判定非线性发展方程差分格式计算稳定性的新方法[J]. 科学通讯, 2000, 45(8): 881-884.

- [10] 林万涛, 季仲贞, 杨晓忠. 发展方程计算稳定性的比较分析[J]. 气候与环境研究, 2001, 6(1): 77-83.
- [11] Fornberg B. On the instability of leap-frog and Crank-Nicolson approximation of a nonlinear partial differential equation[J]. Math Comp, 1973, 27(121): 45-57.
- [12] 周振中. 非线性发展方程的计算稳定性对初值的依赖[J]. 大气科学, 1983, 7(2): 223-227.

Dependence of Computational Stability of Nonlinear Advection Equation on the Initial Value

ZHU Jie-shun, ZHOU Wei-can

(Department of Mathematics, NIM, Nanjing 210044, China)

Abstract: A computational instability case of 1-D nonlinear advection equation with a time-forward differential format is investigated. Four prepositions are put forward and conclusions are given. Under certain circumstance, the computation of the differential equation becomes from instable to stable just by making the initial value only locate at one side of the x axis through a subtle modification on it. The results improve and correct the relevant conclusions existed.

Key words: nonlinear advection equation; computational stability; initial value