第 25 卷第 5 期
2002 年 10 月

南京气象学院学报
Journal of Nanjing Institute of Meteorology

Vol. 25 No. 5
Oct. 2002

文章编号: 1000-2022(2002)05-0706-05

一类常系数线性奇异积分方程的讨论

蒋勇国
(南京气象学院 数学系, 江苏 南京 210044)

摘 要: 在"矩形"主值的基础上, 获得合成公式, 并利用合成公式讨论了一类相应的常系数线性奇异积分方程。

关键词: 离散核; "矩形"主值; 合成公式; 线性奇异积分方程
中图分类号: O174.56 文献标识码: A

在多复变函数论中, 单叶单连通区域, 并不一定全纯等价, 如多圆柱和超球就是两种不全纯等价的单叶单连通区域, 并且不同区域上的全纯函数有不同的积分表示, 因而难于利用一个统一的多复变数的 Cauchy 型积分来处理高维奇异积分方程。本文根据龚升的思想[1-2], 利用"矩形"主值和林良裕的立体角系数的方法[3], 首先获得合成公式, 最后讨论了一类常系数线性奇异积分方程, 证明它与 Fredholm 方程等价, 并且其特征方程 L^* 在内有唯一解。

1 定义及命题

定义[4]: 设 $D = \bigcup_{j=1}^{2} B_j(a^j)$, $a^j = (a_1^j, a_2^j, \cdots, a_n^j)$ 是一连通开集, 称为复双球垒域, 其中 $B_j(a^j) = \{\zeta \mid |\zeta_1 - a_1^j|^2 + \cdots + |\zeta_n - a_n^j|^2 < r_j^2\}, j = 1, 2$; $B_1 \cap B_2 = \approx$, 且 $B_1 \neq B_1 \cap B_2 \neq B_2$。

文献[5]给出如下命题:

命题 **1**: 设 $f \in A_c(D)$, 其中 $A_c(D)$ 表示在 D 上可微、在 $\bar{D}$ 上连续的全体函数所成的集合, 则

$$F(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\Omega(\eta(\zeta, z)), \quad \forall z \in D。 \tag{1}$$

其中核 $\Omega(\eta(\zeta, z))$ 是在 $(\zeta, z) \in \partial D \times D$ 上定义的有限离散局部全纯核[3], 它是一种特殊的 Cauchy-Fantappie 形式

$$\Omega(\eta(\zeta, z)) = (-1)^{n(n-1)/2}(2\pi i)^n \det(\eta, \bar{\partial}\eta, \cdots, \bar{\partial}\eta) \wedge d\zeta \tag{2}$$

其中 $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n)^{\mathrm{T}}$, $\eta_k = \dfrac{w_k}{\Phi(\zeta, z)}$, $w_k = \sum_{j=1}^{2} \chi_{B_j}(z)(\bar{\zeta}_k - \bar{a}_k^j)$, $k = 1, 2, \cdots, n$。$\Phi(\zeta, z) = \langle \zeta - z, w \rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{2} \chi_{B_j}(z)(\zeta_k - a_k)(\bar{\zeta}_k - \overline{a_k^j})$, χ_{B_j} 是开集 B_j 上的特征函数。

收稿日期: 2001-11-13; 改回日期: 2002-03-18
基金项目: 江苏省教育厅自然科学研究指导性计划项目(01KJD110002)和南京气象学院科研基金项目
作者简介: 蒋勇国(1969-), 男, 湖南永州人, 助教, 硕士, 研究方向是多复变数函数论.

现定义“矩形”主值为

$$\mathrm{V.P.}F(t)=\lim_{\epsilon\to 0}\int f(\zeta)\Omega(\eta(\zeta,z))。\tag{3}$$

其中 $t\in\partial D$, $\sum_{\epsilon}(t)$ 为 $\sigma_\epsilon(t)$ 在 ∂D 上的余集, 而 $\sigma_\epsilon(t)$ 定义为

$$\sigma_\epsilon(t)=\{\zeta\in\partial D:\ \mathrm{Re}\Phi(\zeta,t)<\alpha\epsilon,\ \mathrm{Im}\Phi(\zeta,t)<\beta\epsilon;\alpha,\beta>0\}。$$

并定义 $t\in\partial D$ 的立体角系数 $\alpha(t)$ 为

$$\alpha(t)=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{b_\epsilon\cap D}\Omega(\eta(\zeta,t)),\quad \alpha(t)\le 1。\tag{4}$$

其中 $b_\epsilon(t)=\{\zeta\in C^n:\ \mathrm{Re}\Phi(\zeta,t)<\alpha\epsilon,\ \mathrm{Im}\Phi(\zeta,t)<\beta\epsilon;\alpha,\beta>0\}$。由此有相应的命题 2[5]。

命题 **2**(Plemelj 公式): 设 $f\in L^*$, 当 z 从 D 内趋于 $t\in\partial D$, 且满足 $\rho(z,t)/d(z,\partial D)<M$, 则

$$F^+(t)=\mathrm{V.P.}\int_{\partial D}f(\zeta)\Omega(\eta(\zeta,t))+(1-\alpha(t))f(t)。\tag{5}$$

其中 $F^+(t)$ 为 $F(t)$ 在 D 内沿着非切线方向趋于 $t\in\partial D$ 的极限, L^* 为定义在 ∂D 上满足 $\mathrm{Lip}\lambda$ 条件, $0<\lambda\le 1$ 且能连续开拓为 D 上的 $C^{(1)}$ 函数集合。

2　合成公式

设 ∂D_0 表示 ∂D 上具有 $2n-1$ 维的光滑部分, $\partial D/\partial D_0=\partial B_1\cap\partial B_2=L_2$ 表示 ∂D 上具有 $2n-2$ 维的光滑流形。

定理 **1**: 若 $\varphi\in L^*(\bar{D})$, $\zeta,\xi\in\partial D=\partial D(\gamma_1)=\partial D(\gamma_2)$, 则

$$\int_{\zeta\in\partial D(\gamma_2)}\Omega(\eta(\zeta,t))\int_{\xi\in\partial D(\gamma_1)}\varphi(\xi)\Omega(\eta(\xi,\zeta))=(1-B_{\gamma_1}-b_2)\int_{\zeta\in\partial D(\gamma_1)}\varphi(\zeta)\Omega(\eta(\zeta,t))+$$
$$b_1(1-B_{\gamma_1})\varphi(t)。\tag{6}$$

若设 $B_{\gamma_1}+b_2=1$, 则右端等于 $b_1(1-B_{\gamma_1})\varphi(t)$。尤其是当 $t\in\partial D_0$, $\zeta\in\partial D_0$ 时

$$\int_{\zeta\in\partial D(\gamma_2)}\Omega(\eta(\zeta,t))\int_{\xi\in\partial D(\gamma_1)}\varphi(\xi)\Omega(\eta(\xi,\zeta))=(1-B_{\gamma_1}-B_{\gamma_2})\int_{\zeta\in\partial D(\gamma_1)}\varphi(\zeta)\Omega(\eta(\zeta,t))+$$
$$B_{\gamma_1}(1-B_{\gamma_1})\varphi(t)。\tag{7}$$

若 $B_{\gamma_1}+B_{\gamma_2}=1$, 则(7)式右端等于 $B_{\gamma_1}B_{\gamma_2}\varphi(t)$。其中 $B_{\gamma_j}=\dfrac{2^{n-1}}{\pi}\{\dfrac{\pi}{2}+\displaystyle\int_0^{\arctan(\beta_j/\alpha_j)}\cos^{n-2}t\dfrac{\sin(n-1)t}{\sin t}\mathrm{d}t\}$[1], $b_i=1-\alpha(t)$, $j=1,2$。$\alpha(t)$ 如(4)式所定义。

证明: 为简单起见, 只证当 $t\in\partial D/\partial D_0$, ∂D_0 是 ∂D 的光滑部分。即 t 是 D 的边界上非光滑点的情形。

令 $\varphi_1(\zeta)=\int_{\xi\in\partial D(\gamma_1)}\varphi(\xi)\Omega(\eta(\xi,\zeta))$, $\varphi_2(\zeta)=\int_{\xi\in\partial D(\gamma_2)}\varphi_1(\xi)\Omega(\eta(\xi,\zeta))$。并取 Cauchy 型积分:

$$f(w)=\int_{\zeta\in\partial D(\gamma_1)}\varphi(\zeta)\Omega(\eta(\zeta,w)),\quad f_1(z)=\int_{\xi\in\partial D(\gamma_2)}\varphi_1(\zeta)\Omega(\eta(\zeta,z));\quad w,z\in D。$$

当 w,z 满足条件 $\rho(w,t)/d(w,\partial D)<M$ 及 $\rho(z,t)/d(z,\partial D)<M$, 即 w 和 z 分别沿非切线方向趋于边界点 ζ。$t\in\partial D/\partial D_0$ 时, 由命题 2, 有

$$f^+(\zeta)=\int_{\partial D(\gamma_1)}f(\xi)\Omega(\eta(\xi,\zeta))+(1-\alpha_1(\zeta))f(\zeta),$$

$$f_1^+(t) = \int_{\partial D(\gamma_2)} \varphi(\xi)\,\Omega(\eta(\xi,t)) + (1-\alpha_2(t))f(t)。$$

由 φ_1 和 φ_2 的定义,有

$$\varphi_1(\zeta) = f^+(\zeta) - (1-\alpha_1(\zeta))\varphi(\zeta),\quad \varphi_2(t) = f_1^+(t) - (1-\alpha_2(t))\varphi(t)。$$

以 $\varphi_1(\zeta)$ 代入 $f_1(z)$ 可得

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \int_{\zeta\in\partial D(\gamma_2)} [f^+(\zeta) - (1-\alpha_1(\zeta))\varphi(\zeta)]\,\Omega(\eta(\zeta,z)) \\ &= f^+(z) - \int_{\zeta\in\partial D(\gamma_2)} (1-\alpha_1(\zeta))\varphi(\zeta)\,\Omega(\eta(\zeta,z)) \\ &= (1-B_{\gamma_1})f(z), \end{aligned}$$

$$\text{所以} f_1^+(t) = (1-B_{\gamma_1})f(z)。$$

由此,有

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= f_1^+(t) - (1-\alpha_2(t))\varphi(t) \\ &= (1-B_{\gamma_1})f_1^+(t) - (1-\alpha_2(t))[f^+(t) - (1-\alpha_1(t))\varphi(t)] \\ &= (1-B_{\gamma_1}-b_2)f^+(t) + b_1b_2\varphi(t) \\ &= (1-B_{\gamma_1}-b_2)\Big[\int_{\partial D(\gamma_1)} \varphi(\zeta)\,\Omega(\eta(\zeta,t)) + b_1\varphi(t)\Big] + b_1b_2\varphi(t) \\ &= (1-B_{\gamma_1}-b_2)\int_{\partial D(\gamma_1)} \varphi(\zeta)\,\Omega(\eta(\zeta,t)) + b_1(1-B_{\gamma_1})\varphi(t)。 \end{aligned}$$

由此立得(6)式。若 $B_{\gamma_1}+b_2=1$,则

$$\varphi_2(t) = b_1(1-B_{\gamma_1})\varphi(t) = b_1b_2\varphi(t)。$$

同理可得(7)式。

3 具有常系数的线性奇异积分方程

设 $\varphi\in L^*(\bar{D})$,下面假定 $\alpha(t)\neq 1$, $\partial D(\gamma) = \partial D(\gamma_1) = \partial D(\gamma_2) = \partial D$,由域的边界结构,只需 $\beta\neq 0$。

定义奇异积分算子为

$$H_{0\gamma}\varphi = \frac{1}{B}\int_{\partial D(\gamma)} \varphi(\zeta)\,\Omega(\eta(\zeta,t)),\quad t\in\partial D_0; \tag{8}$$

$$H_{2\gamma}\varphi = \frac{1}{1-\alpha(t)}\int_{\partial D(\gamma)} \varphi(\zeta)\,\Omega(\eta(\zeta,t)),\quad t\in\partial L_2。 \tag{9}$$

其中 $B = \dfrac{2^{n-1}}{\pi}\Big\{\dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\int_0^{\arctan(\beta/\alpha)} \cos^{n-2}t\,\dfrac{\sin(n-1)t}{\sin t}\mathrm{d}t\Big\}$。由(7)式,得

$$H_{0\gamma_2}H_{0\gamma_1} = \frac{1}{B_{\gamma_1}B_{\gamma_2}}(1-B_{\gamma_1}-B_{\gamma_2})H_{0\gamma_1} + \frac{1}{B_{\gamma_2}}(1-B_{\gamma_1})I,\quad \varphi\in L^*。 \tag{10}$$

特别地,当 $B_{\gamma_1}+B_{\gamma_2}=1$,有

$$H_{0\gamma_2}H_{0\gamma_1} = H_{0\gamma_1}H_{0\gamma_2} = I。 \tag{11}$$

当 $t\in L_2$ 时,由(6)式有

$$H_{2\gamma_2}H_{2\gamma_1} = \frac{1}{B_{\gamma_1}b_2}(1-B_{\gamma_1}-b_2)H_{0\gamma_1} + \frac{b_1}{B_{\gamma_2}b_2}(1-B_{\gamma_1})I,\quad \varphi\in L^*。 \tag{12}$$

特别地,当 $B_{\gamma_1}+b_2=1$ 时,有

$$H_{2\gamma_2}H_{2\gamma_1}=\frac{b_1}{B\gamma_2}I,\quad \varphi\in L^*;\tag{13}$$

$$H_{2\gamma_2}H_{0\gamma_1}=\frac{1}{B\gamma_1 b_2}(1-B\gamma_1-b_2)H_{0\gamma_1}+\frac{1-B\gamma_1}{b_2}I,\quad \varphi\in L^*;\tag{14}$$

$$H_{0\gamma_2}H_{2\gamma_1}=\frac{1}{B\gamma_1 B\gamma_2}(1-B\gamma_1-B\gamma_2)H_{0\gamma_1}+\frac{b_1}{B\gamma_1}(1-B\gamma_1)I,\quad \varphi\in L^*。\tag{15}$$

下面考虑方程

$$s_1\varphi+t_1H_{2\gamma}\varphi+K\varphi=f。\tag{16}$$

其中 s_1, t_1 为复常数, 已给 $f\in L^*$, $K\varphi=\int\varphi(\zeta)K(\zeta,t)d\zeta$, 核 $K(\zeta,t)$ 是 $\partial D\times\partial D$ 上关于 ζ, t 分别满足 Lipλ 条件的复值函数, $0<\lambda\leq 1$。方程

$$s_1\varphi+t_1H_{2\gamma}\varphi=f\tag{17}$$

称为(16)式的特征方程。

对于(12)式, 当 $B\gamma_1+b_2\neq 1$, 并记 $B\gamma_1=B\gamma$, $b_2=b=1-\alpha(t)$ 时, 有

$$H_{2\gamma}^2=\frac{1}{B\gamma b}(1-B\gamma-b)H_{2\gamma}+\frac{1}{B\gamma}(1-B\gamma)I。\tag{18}$$

下面在仅考虑应用算子合成公式(18)的情况下, 讨论相应的线性奇异积分方程的解。

定理 **2**: 设在方程式(16)中, $s_1\neq 0$, $t_1\neq 0$ 为复常数, 记

$$B_0=\frac{bt_1^2(1-B\gamma)-B\gamma bs_1^2-s_1t_1(1-B\gamma-b)}{B\gamma b}s_1+\frac{t_1(1-B\gamma-b)}{B\gamma b}。$$

已给 $f\in L^*(\bar{D})$, 积分算子 K 核 $K(v,u)$ 满足 Lipλ 条件, 则

1) 方程式(16)的特征方程 $s_1\varphi+t_1H_{2\gamma}\varphi=f$ 在 L_2 上和 L^* 内有唯一解

$$\varphi=B_0^{-1}\left[t_1H_{2\gamma}-\left(s_1+\frac{t_1(1-B\gamma-b)}{B\gamma b}\right)\right]f。\tag{19}$$

2) 在 L_2 上和 L^* 内奇异积分方程式(16)与下面的 Fredholm 方程等价,

$$B_0\varphi+MK\varphi=Mf。\tag{20}$$

其中算子

$$M=t_1H_{2\gamma}-\left(s_1+\frac{t_1(1-B\gamma-b)}{B\gamma b}\right)I。\tag{21}$$

证明: 1) 利用算子 M 乘以(17)式的两边得(20)式, 因此(19)式是(17)式在 L_2 上和 L^* 内的唯一解。

2) 要证(16)式与(20)式等价, 只要证算子 M 的逆算子 $M^{-1}=l_1H_{2\gamma}+l_2I$ 存在。由于 MM^{-1} $=l_1t_1H_{2\gamma}^2-\left(s_1+\frac{t_1(1-B\gamma-b)}{B\gamma b}\right)l_1H_{2\gamma}+l_2t_1H_{2\gamma}-l_2\left(s_1+\frac{t_1(1-B\gamma-b)}{B\gamma b}\right)I$, 由(18)式可得

$$\begin{aligned}MM^{-1}=&\ l_1t_1\left(s_1+\frac{t_1(1-B\gamma-b)}{B\gamma b}\right)H_{2\gamma}+l_1t_1\frac{1-B\gamma}{B\gamma}I-\left(s_1+\frac{t_1(1-B\gamma-b)}{B\gamma b}\right)l_1H_{2\gamma}+\\ &\ l_2t_1H_{2\gamma}-l_2\left(s_1+\frac{t_1(1-B\gamma-b)}{B\gamma b}\right)I\\ =&\left[\left(s_1+\frac{t_1(1-B\gamma-b)}{B\gamma b}\right)l_1(t_1-1)+l_2t_1\right]H_{2\gamma}+\\ &\left[l_1t_1\frac{1-B\gamma}{B\gamma}-l_2\left(s_1+\frac{t_1(1-B\gamma-b)}{B\gamma b}\right)\right]I。\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} \left(s_1 + \dfrac{t_1(1 - B\gamma - b)}{B\gamma b}\right) l_1 (t_1 - 1) + l_2 t_1 = 0; \\ l_1 t_1 \dfrac{1 - B\gamma}{B\gamma} - l_2\left(s_1 + \dfrac{t_1(1 - B\gamma - b)}{B\gamma b}\right) = 1。 \end{cases}$$

解这个方程组得 $l_1 = t_1/B_0, l_2 = s_1/B_0$。从而 $M^{-1} = \frac{t_1}{B_0} H_{2\gamma} + \frac{s_1}{B_0} I$，因此 $MM^{-1} = I$。

下面证明 $H_{2\gamma} K\varphi$ 是 Freholm 算子，即

$$H_{2\gamma} K\varphi = \int_{\partial D} \Omega(\eta(\zeta, t)) \int_{\partial D(\gamma)} \varphi(w) K(w, \zeta) \dot{w}。$$

由定理 5，并应用 Lebesgue 定理，得

$$H_{2\gamma} K\varphi = \int_{\partial D} \varphi(w) \dot{w} \int_{\partial D(\gamma)} \Omega(\eta(\zeta, t)) K(w, \zeta)。$$

记

$$K_1(w, t) = \int_{\partial D(\gamma)} \Omega(\eta(\zeta, t)) K(w, \zeta)。$$

故：$K_1(w, t)$ 关于 t 和 w 分别在 $\partial D_0 \times \partial D_0$ 及 $\{\partial D / \partial D_0\} \times \{\partial D / \partial D_0\}$ 上逐块属于 $\mathrm{Lip}(\lambda - \epsilon)$ 条件，并且有界，所以(20)式是一 Fredholm 方程。

参考文献:

[1] 龚 升. 多复变数的奇异积分[M]. 上海: 上海科学出版社, 1982: 35-40.

[2] 龚 升. 复超球面上的奇异积分方程[J]. 数学学报, 1996, 16(2): 194-210.

[3] 林良裕. 具有离散核的 Bochner-Martineli 公式[J]. 科学通报, 1996, 45(24): 2 222-2 224.

[4] 林良裕. 复双球垒域上 Cauchy 型积分的边界性质[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 1998, 37(3): 318-322.

[5] 林良裕. 闭逐块光滑流形上 Cauchy-Fantappie 型积分的边界性质[J]. 数学学报, 1995, 38(1): 13-23.

Discussion of One Linear Singular Integral Equation with Invariable Coefficients

JIANG Yong-guo

(Department of Mathematics, NIM, Nanjing 210044, China)

Abstract: A composite formula is obtained based on the "quadrangle" principal value which is used to discuss one linear singular integral equation with invariable coefficients.

Key words: discrete kernel; "quadrangle" principal value; composite formula; linear singular integral equation