第 25 卷第 4 期　　南 京 气 象 学 院 学 报　　Vol. 25 No. 4
2002 年 8 月　　Journal of Nanjing Institute of Meteorology　　Aug. 2002

文章编号: 1000-2022(2002) 04-0560-05

关于圆形轨道稳定性的两个问题

王建中
(浙江科技学院 基础部, 浙江 杭州　310012)

摘　要: 质点在有心力 $F = -c/r^n$ 作用下作圆形轨道运动, 当 $n < 3$ 时, 轨道是稳定的。其次, 作圆形轨道运动的质点, 若其势能为 $U(r) = -km/r^p$, 则当 $0 < p < 2$ 时, 轨道是稳定的。指出了 $n = 3$ 和 $n > 3$ 这两种情况所对应的轨道不稳定性的区别, 并讨论了从力和势能给出的两个稳定性条件之间的联系。

关键词: 圆形轨道; 稳定平衡; 势能曲线; 有效势能
中图分类号: O317　　文献标识码: A

质点在有心力作用下, 若满足一定的初始条件, 就有可能绕力心作圆形轨道运动。"现在我们要问, 这种圆形轨道是稳定的, 还是不稳定的? 这个问题在物理上很重要。因为在自然界, 微小扰动是经常存在的, 它将破坏不稳定的圆形轨道, 只有稳定的圆形轨道, 才有机会继续下去"[1]。文献[1]对 $u = 1/r$ 用小参量展开的方法给出了解答: 在引力与距离的 n 次方反比的力

$$F = -c/r^n \tag{1}$$

的作用下, 质点作圆形轨道运动时, 只当 $n < 3$ 时才是稳定的。并进一步指出, 立方反比律($n = 3$), 则给不出稳定的圆形轨道。文献[2]对 r 用小参量展开的方法研究了这一问题, 得到了同样的结果, 并指出对于 $n = 3$ 的情形, "圆轨道也是不稳定的"。所以, 质点在(1)式所示的有心力场中运动, 圆形轨道稳定的条件是 $n < 3$。

文献[3]指出, 质点 m 在其势能为 $-km/r^p$ 的有心力作用下, 沿半径为 r_0 的圆轨道运动, 则圆轨道的稳定条件是 $0 < p < 2$, 并特别指明, 若 $p = 2$, "圆轨道一般不可能"。

但是, 还有两个问题, 本文拟作一探讨。

问题 1: 质点在(1)式所示的有心力场中运动, 当 $n > 3$ 或 $n = 3$ 时, 圆形轨道都是不稳定的, 这两种情况, 圆形轨道的不稳定有没有区别。

问题 2: 根据力和势能的关系, 圆轨道的稳定条件 $0 < p < 2$, 相当于 $1 < n < 3$。$p = 2$ 对应于 $n = 3$, 大家能理解 $p < 2$ 的结论, 但怎样理解 $0 < p$ 的含义呢? $p = 0$(相当于 $n = 1$) 行不行? 文献[1]和文献[2]从(1)式得到的结论仅要求 $n < 3$, 而 $n = 1$ 满足这个条件。这个矛盾怎样解决?

收稿日期: 2001-12-27; 改回日期: 2002-02-25
作者简介: 王建中(1956-), 男, 浙江平湖人, 副教授, 主要从事混沌理论应用研究和物理教学工作.

1　对问题的分析

1.1　有效势能

利用有效势能 $U_{\mathrm{eff}}(r)$ 的概念, 可以对上两个问题给出明确的说明。质点在有心力作用下的运动是平面运动, 其角动量守恒。利用这一性质可以把变量 θ 消去, 而得到仅含有变量 r 的能量关系, 相当于质点作一维运动的方程。

质点在有心力作用下, 设其势能为 $U(r)$, 动能为 $E_k = mv^2/2 = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)/2$, 则质点的机械能为

$$E = E_k + U(r) = m\dot{r}^2/2 + mr^2\dot{\theta}^2/2 + U(r)。\tag{2}$$

其中, 第 1 项为质点沿矢径运动的动能, 第 2 项是质点沿垂直于矢径方向运动的动能, $U(r)$ 是势能。而质点角动量的大小

$$L = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = mr^2\dot{\theta}$$

为常量。从中把 $\dot{\theta}$ 解出, 代入能量表达式(2), 可得

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)。$$

其中, 第 2 项 $\frac{L^2}{2mr^2}$ 又称为离心势能[4]。而把

$$U_{\mathrm{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \tag{3}$$

称为有效势能[2]。于是质点在有心力作用下运动的机械能为

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\mathrm{eff}}(r)。\tag{4}$$

这相当于质点沿 r 方向作一维运动的方程。

1.2　圆形轨道的稳定性

质点作一维运动时, 可以根据其势能曲线的特点给出质点的平衡性质: 势能曲线导数为零处是质点的平衡点; 势能极大值处是质点的不稳定平衡点; 势能极小值处是质点的稳定平衡点; 势能为常数, 则质点处于随遇平衡。相应地, 若有效势能 $U_{\mathrm{eff}}(r)$ 具有极大值, 则圆形轨道是不稳定的; 若有效势能 $U_{\mathrm{eff}}(r)$ 具有极小值, 则圆形轨道是稳定的; 若有效势能 $U_{\mathrm{eff}}(r)$ 为常量, 其圆形轨道暂且称之为临界轨道。下面要说明, 质点在(1)式的有心力作用下运动, $n = 3$ 对应的有效势能 $U_{\mathrm{eff}}(r)$ 是常量; 而 $n > 3$ 对应的有效势能 $U_{\mathrm{eff}}(r)$ 具有极大值。

圆形轨道对应于 $U_{\mathrm{eff}}(r)$ 的极值点, 由(3)式取 $U_{\mathrm{eff}}(r)$ 的一阶导数为零, 可得

$$-\frac{L^2}{mr^3} + \frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}\Big|_{r=r_o} = 0。$$

因为势能曲线在极值点的二阶导数大于或小于零决定势能是极小值还是极大值。对上式求导, 并考虑到势能 $U(r)$ 对 r 的导数等于质点所受作用力的负值, 可知

$$\frac{3L^2}{mr_o^4} - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\Big|_{r=r_o} \begin{cases} > 0, \\ = 0, \\ < 0 \end{cases} \tag{5}$$

分别对应于稳定圆轨道、临界圆轨道和不稳定圆轨道。

若有心力的函数形式为 $F(r) = -c/r^n$, 其中 $c > 0$, 则 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} = n\frac{c}{r^{n+1}}$, 代入(5)式, 得到稳定圆

轨道、临界圆轨道和不稳定圆轨道的条件分别为

$$n\begin{cases} < 3, \\ = 3, \\ > 3。\end{cases} \tag{6}$$

1.3 对问题 **1** 的讨论

质点在(1)式所示的有心力场中运动, $n>3$ 或 $n=3$ 时的圆形轨道都是不稳定的, 但两者有所不同。取 $n=4$ 来代表 $n>3$ 的情形。当 $n=4$ 时, 由力的表达式, 取无穷远处为零势点, 可得势能 $U(r)=-c/(3r^3)$, 代入(3)式得

$$U_{\mathrm{eff}}(r)=\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{c}{3r^3}。$$

图 1 用 Visual BASIC 编程绘出了 $n=4$ 时的有效势能曲线图, 有效势能曲线确实有极大值, 所以圆轨道不稳定。

在 $n=3$ 的情形, 同理可得势能 $U(r)=-c/(2r^2)$, 而有效势能

$$U_{\mathrm{eff}}(r)=\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{c}{2r^2}。 \tag{7}$$

由(7)式可见, 只要角动量满足 $L^2=mc$, 则 $U_{\mathrm{eff}}(r)=0$ 为常数, 质点可以以任意半径 r 作圆形轨道运动, 不论 r 为何, $F=ma_n$ 总是成立。

所以, $n=3$ 和 $n>3$ 的圆轨道, 虽然都是不稳定圆轨道, 但还是有区别的。在 $n>3$ 的情形, $U_{\mathrm{eff}}(r)$ 有极大值, 与 $U_{\mathrm{eff}}(r)$ 极大值对应的 r_o 是圆形轨道的半径。给定初始条件, 或者说, 给定角动量的值 L, 则 r_o 是唯一的。当受一初始扰动后, 运动质点就离开 r_o。随着 r 的变化, 有效势能 $U_{\mathrm{eff}}(r)$ 变小, 径向动能 $mr^2/2$ 就增加。如果用某种办法对质点施加一个作用, 消去径向动能, 则质点还是不能以变化后的 r 作圆形轨道运动, 而是继续偏离 r_o。从图 1 所示的 $n=4$ 时的有效势能曲线图, 不难理解上述说明。

在 $n=3$ 的情形, 有效势能曲线见图 2, $U_{\mathrm{eff}}(r)$ 为常数, 与 r 无关。则质点作圆形轨道运动的半径是任意的, 换言之, 质点以 r_o 为半径作圆形轨道运动, 则该质点也可以以任意半径 r 作圆形轨道运动。当质点以 r_o 为半径作圆形轨道运动时, 若受一初始扰动, 运动质点离开 r_o, 因为

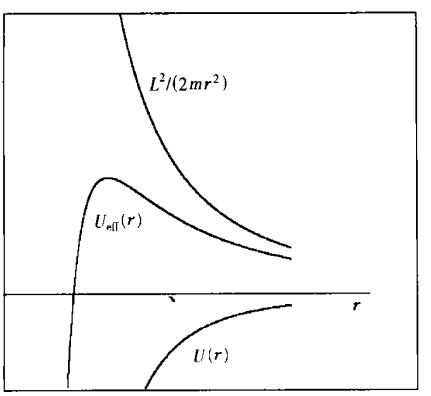

图 1 $n=4$ 时有效势能 $U_{\mathrm{eff}}(r)$ 曲线

Fig. 1 The effective potential energy $U_{\mathrm{eff}}(r)$ when $n=4$

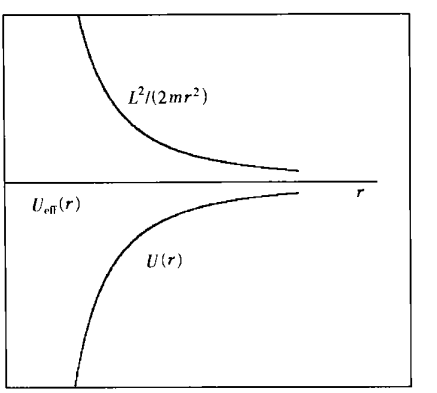

图 2 $n=3$ 时有效势能 $U_{\mathrm{eff}}(r)=0$ 曲线

Fig. 2 The effective potential energy $U_{\mathrm{eff}}(r)=0$ when $n=3$

$U_{\mathrm{eff}}(r)$ 不变, 由(4) 式知, 质点在受到初始扰动时获得的径向动能 $mr^{\dot{2}}/2$ 也不变, 因而质点作等距螺旋线运动。若给一作用, 消除径向动能, 则质点就以变化后的确定半径继续作圆轨道运动。只要满足条件 $L^2 = mc$, 不管 r 是多少, 质点都可以作圆形轨道运动, 由于这个情况, 临界轨道也可称之为随遇稳定轨道。$n < 3$ 对应于圆运动的稳定轨道, $n > 3$ 对应于圆运动的不稳定轨道, 而 $n = 3$ 是两者的临界值。

1.3　对问题 **2** 的讨论

根据势能和力的关系, 势能为

$$U(r) = -k\frac{m}{r^p}。\tag{8}$$

对应的力是 $-kmp/r^{p+1}$, 记 $kmp = c, p + 1 = n$, 则

$$F = -c/r^n。\tag{9}$$

按文献[3], 对稳定圆轨道, $0 < p < 2$, 从(9) 式看, 即 $1 < n < 3$。这两个条件中的后一个, 即 $n < 3$ 符合上面的计算。但上面的计算并没有要求 $n > 1$。其实, 从(8) 式考虑, 确实要求 $p > 0$, 但从(9) 式考虑, 只要 $n < 3$, 包括 $n = 1$, $F = -c/r$ 情形, 都存在稳定的圆轨道。

问题 2 的关键是, 对于(9) 式所表达的有心力, 对不同的 n, 势能的表达形式是不同的。若 $1 < n < 3$(相应地, $0 < p < 2$), 取 $r \to \infty$ 处为势能零点, 可得势能

$$U(r) = \int^{\infty} -\frac{c}{r^n}\mathrm{d}r = -\frac{c}{(n-1)r^{n-1}} = -k\frac{m}{r^p}。\tag{10}$$

若 $n = 1$(相应地, $p = 0$), $F(r)$ 与 r 成反比, 不妨取 $r = 1$ 处为势能零点, 则势能

$$U(r) = \int^{r} -\frac{c}{r}\mathrm{d}r = c\ln r。\tag{11}$$

图 3 给出了 $n = 1$ 时的有效势能曲线。确实, 有效势能曲线有极小值, 故圆形轨稳定。所以文献[3] 与文献[1-2] 给出的稳定性条件并不矛盾。同理, 当 $n < 0$(相应地 $p < 0$) 时, 圆形轨道也是稳定的。例如 $n = -1$(相应地 $p = -2$), 则 $f = -cr$, 这是熟知的弹性力。取 $r = 0$ 处为零势点, 其势能为 $U(r) = cr^2/2$, 有效势能具有极小值, 圆形轨道稳定。

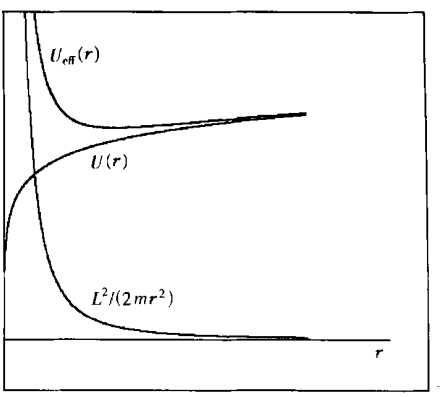

图 3　$n = 1$ 时有效势能 $U_{\mathrm{eff}}(r)$ 曲线

Fig. 3　The effective potential energy $U_{\mathrm{eff}}(r)$ when $n = 1$

2　结　论

(1) 质点在(1) 式所示的有心力场中运动, $n > 3$ 和 $n = 3$ 这两种情况, 圆轨道都是不稳定的。但是这二者之间有区别: 当 $n > 3$ 时, 圆轨道的半径是唯一的, 记为 r_o, 则 $U_{\mathrm{eff}}(r_o)$ 为有效势能的极大值, 质点受到任何扰动, 使运动半径偏离了 r_o, 则会继续偏离; 当 $n = 3$ 时, 圆轨道的半径是任意的, 有效势能 $U_{\mathrm{eff}}(r)$ 为常量, 质点受到扰动使运动半径发生了变化, 有可能以变化后的半径继续圆周运动。

(2) 由力场和势场给出的圆运动轨道稳定条件是不矛盾的。但由力场给出的稳定条件更普遍。对(1) 式所表达的有心力取不同的 n 值, 势能函数的表达式可能不同。

参考文献:

[1] 周衍柏. 理论力学基础教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1986: 83-85.
[2] 胡惠玲, 林纯镇, 吴惟敏. 理论力学基础教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1986: 111-113; 108.
[3] 梁昆淼. 力学: 上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1995: 228.
[4] 基特尔, 耐特, 鲁德曼. 力学: 伯克利物理学教程(第 1 卷)[M]. 北京: 科学出版社, 1979: 272-273.

Two Problems about Stability of a Circular Track

WANG Jian-zhong
(Deptartment of Basic Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310012, China)

Abstract: If a particle moves along a circular track under the action of central force $F = -c/r^n$, the track is stable when $n < 3$. If the potential energy of a particle moving along a circular track is $U(r) = -km/r^p$, the track is stable when $0 < p < 2$. This paper points out the difference in the instability of the track under the circumstances of $n = 3$ and $n > 3$, and discusses the relationship between two conditions of stability respectively given by force and potential energy.

Key words: circular track; stable equilibrium; potential energy curve; effective potential energy