文章编号: 1000-2022(2002)03-0425-04

公交车调度问题的简便数学模型

王顺凤
(南京气象学院 数学系, 江苏 南京　210044)

摘　要: 给出公交车调度问题的简便数学模型, 并对多目标决策问题的非劣解进行讨论。

关键词: 数学模型; 多目标决策; 非劣解
中图分类号: O221.6　　文献标识码: A

市政公用事业是方便群众, 保障社会稳定, 促进经济发展的重要环节。公共交通安排, 是市政公用事业的一个重要组成部分。对城市公交车辆进行高效、合理调度, 有着广泛的社会和经济意义。本文对 2001 年全国大学生数学建模竞赛 B 题的公交车调度问题给出简便数学模型, 并对此问题的非劣解进行讨论。

1　假　设

(1) 公交车匀速行驶;
(2) 公交车停车时间忽略不计;
(3) 05:00, 23:00 时始点站必须各发一辆车;
(4) 每辆车乘车人数不超过 120 人;
(5) 在每个站点, 乘客在当前车辆离站至下辆车到站的时间段内均匀到达。

2　问题分析

采用所给的数据分析该公交线路, 公交公司的利益可用总的发车次数和所需车辆数来衡量; 乘客的利益可用等车时间来衡量, 进一步可分为用高峰时段的候车时间和平峰时段的候车时间来衡量。由于一条线路的公交车要维持较长时期的稳定运行, 因而上下行线每天的发车次数相同, 才能保证第二天在起点站 A_0 和终点站 A_{14} 的车辆数不变, 否则必有空车行驶, 故设每天上下行线的发车次数都为 m。

由此, 该问题是一个多目标决策问题[1], 决策变量是 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)$, 其中 X_i, Y_i 分别表示上、下行线第 $i-1$ 辆车与第 i 辆车发车的时间间隔($1 \le i \le m$)。从乘客和公交公司利益出发, 可以有如下目标函数:

(1) 乘客高峰时段候车超过 5 min 的人数尽可能少;

收稿日期: 2001-10-26; 改回日期: 2002-01-07

作者简介: 王顺凤(1965-), 女, 江苏宜兴人, 讲师, 硕士生, 研究方向: 计算数学.

(2) 乘客平峰时段候车超过 10 min 的人数尽可能少;

(3) 发车班数 m 尽可能少;

(4) 公交公司在该线路投入的车辆总数 g 尽可能少。

对此多目标决策问题, 只能求得非劣解[1-2] 和各方较满意时的较优解。在建立相应的模型之前, 首先估计一下至少需要多少发车次数。

下行时, 每个小时段最大流量都在 $A_4 \to A_5$, 而全天 $A_4 \to A_5$ 总流量为 26 200 人; 同样, 上行时, 每个小时段最大流量大部分都在 $A_9 \to A_8$, 总流量也约为 26 200 人, 26 200/120 = 218.3, 考虑到 05:00 时发的车载人很少, 因此, 要把这 26 200 人运走, 至少要 220 车次, 即上下行各应派车至少 220 次。

3 一个简便模型

设从开始到 t 时刻候车的累计总人数为 $F_i(t)$, $(0 \le i \le 13)$, $D_{i,k}$表示第 k 时段第 i 辆车上车人数, $E_{i,k}$表示第 k 时段第 i 辆车下车人数。则当 $t \in (K, K+1]$ 时,

$$F_i(t) = \sum_{k=1}^{K} D_{i,k} + D_{i,K} \times [t - (5 + K - 1)]/60, \qquad (0 \le i \le 13)。$$

设从开始到 t 时刻在第 i 站的累计下车人数为 $X_i(t)$。则当 $t \in (K, K+1]$时,

$$X_i(t) = \sum_{k=1}^{K} E_{i,k} + E_{i,K} \times [t - (5 + K - 1)]/60, \qquad (0 \le i \le 13)。$$

记: 第 k 次车到达第 i 站时, 在车站的候车人数为 $W_{i,k}$; 第 k 次车到达第 i 站时可带走的人数为 $Q_{i,k}$; 第 k 次车到达第 i 站时实际带走的人数为 $B_{i,k}$; 上行线第 k 次车到达第 i 站的时间为 $T_{i,k}$; 第 k 次车离开第 i 站时车上人数为 $P_{i,k}$。其中, $1 \le k \le m$, $0 \le i \le 13$。

则以上变量和函数之间满足以下初始条件和递推关系:

(1) 初始条件的确定。由于每辆车可载人数不超过 120 人, 故第一辆车可带走人数为 $Q_{i,1} = 120$, 第一辆车到达第 i 站时, 该站的候车人数 $W_{i,1}$为 $F_i(T_{i,1})$, 第一辆车到达第 i 站后实际带走的人数 $B_{i,1}$应为可带走人数和站上候车人数之最小值, 故有

$$\begin{cases} Q_{0,1} = 120; \\ W_{0,1} = F_0(T_{0,1}); \\ B_{0,1} = \min\{W_{0,1}, Q_{0,1}\}; \\ P_{0,1} = B_{0,1}。 \end{cases}$$

(2) 递推关系。当 $i > 0$, $k > 1$ 时, 每辆车可载客 120 人, 当第 k 次车到达第 i 站时可带走的人数为 $Q_{i,k}$, 为最大载客数减去该车过$(i-1)$ 站时车上的人数加上在第 i 站下车人数; 在第 k 次车到达时, 第 i 站候车人数为此时累计的候车人数减去此前的 $k-1$ 辆车带走的人数 $\sum_{j=1}^{k-1} B_{i,j}$, 实际带走的人数为上述二者之最小值。此时车上人数为第 k 次车离开上一站时车上人数减去该站下车人数加上该站上车人数。故有如下递推关系

$$\begin{cases} Q_{i,k} = 120 - P_{i-1,k} + X_i(T_{i,k}); \\ W_{i,k} = F_i(T_{i,k}) - \sum_{j=1}^{k-1} B_{i,j}; \\ B_{i,k} = \min\{W_{i,k}, Q_{i,k}\}; \\ P_{i,k} = P_{i-1,k} - X_i(T_{i,k}) + B_{i,k}。 \end{cases} \qquad (1 \le k \le m, 0 \le i \le 13)$$

(3) 乘客候车时间

公交车从第 $i-1$ 站到第 i 站的时间 t_i 为: $t_i = d_i / v$, $1 \le i \le 13$; 第 k 次车发车时间为: $G_k = 5 + \sum_{i=1}^{k-1} x_i$; 第 k 次车到达第 i 站的时间为: $T_{i,k} = 5 + \sum_{j=1}^{k-1} x_j + \sum_{j=1}^{i} t_j$。按下述规则确定早高峰 $[T_{i,k_1}, T_{i,k_2}]$, 其中: T_{i,k_1}、T_{i,k_2}满足

$$\begin{cases} T_1 = 6, \quad T_2 = 10; \\ T_{i,k_1} \le T_1, \text{且 } T_{1,k_1+1} > T_1; \\ T_{i,k_2} \ge T_2, \text{且 } T_{1,k_2-1} < T_2。 \end{cases}$$

记: $H_{i,k} = \max\left\{\frac{1}{2}W_{i,k}X_{k-1} - \frac{5}{2}W_{i,k}, 0\right\}$; $M_{i,k} = \max\left\{\frac{1}{2}W_{i,k}X_{k-1} - \frac{10}{2}W_{i,k}, 0\right\}$。则早高峰时刻候车超过 5 min 的候车时间总和为

$$T_H = \sum_{i=0}^{13} \sum_{k=k_1+1}^{k_2} H_{i,k}。$$

平峰时刻候车超过 10 min 的候车时间总和为

$$T_L + \sum_{i=0}^{13}\left[\sum_{k=1}^{k_1} M_{i,k} + \sum_{k=k_2+1}^{m} M_{i,k}\right]。$$

由此, 对上行线可建立如下多目标规划模型:

$$\begin{cases} \min\ T_H; \\ \min\ T_L; \\ \min\ m; \\ \min\ g; \\ \text{s.t. } Q_{i,m} \ge F_i(T_{i,m}) - \sum_{k=1}^{m-1} B_{i,k}。 \end{cases}$$

同理, 对下行线可建立类似模型。

4　模型求解

上述建立的多目标问题, 不可能使每个目标都达到最小。为求解模型, 首先将高峰时超过 5 min 的候车总时间和平峰时超过 10 min 的候车总时间作加权和 $u_0 T_H + u_1 T_L$, 其中 u_0、u_1 按如下关系确定

$$\frac{u_0}{u_1} = \frac{(\text{高峰时段到站总人数} / \text{高峰期时间段数})}{(\text{平峰时到站总人数} / \text{平峰期时间段数})}。$$

再对总的有损失的时间 $u_0 T_H + u_1 T_L$ 和发车次数 m 作加权和,

$$u_2(u_0 T_H + u_1 T_L) + u_3 m。$$

式中 u_2、u_3 分别体现了乘客和公交公司双方利益的权重。

确定了发车的时刻表, 即可确定所需最少车辆数。因而可把上述问题转化为如下的单目标规划问题

$$\begin{cases} \min\ u_2(u_0 T_H + u_1 T_L) + u_3 m; \\ \text{s.t. } Q_{i,m} \ge \left[F_i(T_{i,m}) - \sum_{k=1}^{m-1} B_{i,k}\right]。 \end{cases}$$

经计算, 得上下行线每天各发车 238 次, 所需车辆数最少 51 辆, 其中初始时刻 A_0 站停车 22

辆, A_{14}站停车 29 辆。

5 结　论

此简便数学模型给出了公交车辆调度安排的一种方案, 兼顾了乘客和公交公司双方的利益, 且方便于随时对二者的利益调整, 具有一定的代表性。作为实用的公交调度计划问题, 可按相同方法建立多目标决策模型, 求出一些非劣解, 但由于实际情况的复杂性, 还需进一步考虑其他因素。

参考文献:

[1] 现代应用数学手册编委会. 现代应用数学手册—— 运筹学与最优化理论卷[M]. 北京: 清华大学出版社, 1998: 307-312.

[2] 现代应用数学手册编纂委员会. 现代应用数学手册—— 经济数学卷[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2001: 232-239.

A Simple Mathematical Model of City Bus Planning

WANG Shun-feng

(Department of Mathematics, NIM, Nanjing 210044, China)

Abstract: The noninferior solution of mutiobjective decision problem is discussed based on a proposed simple mathematical model of city bus planning.

Key words: mathematical model; mutiobjective decision; noninferior solution