第23卷 第4期 南京气象学院学报 Vol. 23 No. 4
2000年12月 Journal of Nanjing Institute of Meteorology Dec. 2000

文章编号: 1000-2022(2000)04-0608-03

关于 Marty 定则的一个注记

张太忠
(南京气象学院数学系, 南京 210044)

摘 要: 证明了一个正规定则, 改进了 F. Marty、李松鹰和谢晖春、R. Aulaskari 和 P. Lappan 等人的结果。

关 键 词: 全纯函数; 亚纯函数; 正规定则
中图分类号: O174.5 文献标识码: A

1931年, Marty[1] 证明了如下的判别函数族正规性的著名的充分必要条件:

定理**1** 设 F 为区域 D 内的全纯函数族。F 在 D 内正规的充分必要条件是对于 D 内任意紧集 K, 存在相应的正数 M_K 使

$$f^{\#}(z) \leq M_K(1+|f(z)|^2),$$

对于族 F 中所有的函数 $f(z)$ 和 K 中所有的点 z 成立。

此后, 各国学者纷纷进行此方面的研究, 对定理1加以改进。譬如: 李松鹰等[2] 在涉及函数零点重级的条件下证得定理2。

定理**2** 设 k 为一个正整数, F 为区域 D 上一个亚纯函数族, 其中 F 中每个函数的零点重级 $\geq k$, 则 F 在 D 内正规的充分必要条件是对于 D 内任意紧子集 K, 存在相应的正数 M_K 使

$$f^{(k)\#}(z) \leq M_K(1+|f(z)|^{k+1}),$$

对于族 F 中所有的函数和 K 中所有的点 z 成立。

显然, 定理2中 $k=1$ 的特殊情况正好改进了 Marty 定则(定理1)[1]。

Aulaskari 等[3] 也对定理1作了改进(定理3)。

定理**3** 设 F 为定义在 z 平面上区域 D 内的一个亚纯函数族, $z=x+iy$。则 F 在 D 内正规的充分必要条件是对于 D 内任意紧子集 K, 存在相应的正数 $\lambda>2$, 和正数 M_K 使

$$\iint_K \left(\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\right)^{\lambda} dx\,dy \leq M_K,$$

对于族 F 中所有函数都成立。

定理3的必要性可以由定理2的必要性推得。

本文指出一个有趣的结果。它同时是上述3个结果的一个改进。

定理**4** 设 k 为一个正整数, F 为定义在 z 平面上区域 D 内的一个亚纯函数族, 且族 F 中

收稿日期: 2000-08-24; 改回日期: 2000-10-08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19601021); 南京气象学院科研基金资助项目(Y008)
作者简介: 张太忠, 男, 1967年6月生, 讲师, 博士生

每个函数的零点重级$\geq k$, 则 F 在 D 内正规的充分必要条件是对于 D 内任意紧子集 K, 存在相应的正数 $\lambda > 2$, 和正数 M_K 使

$$\iint_K \left(\frac{f^{(k)}(z)}{1+|f(z)|^{k+1}}\right)^{\lambda} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq M_K,$$

对于族 F 中每个函数都成立。

1　一个引理

引理[4]　设 k 为一个正整数, F 为定义在区域 D 内的一个亚纯函数族, 且族 F 中每个函数的零点重级$\geq k$。如果 F 在 $z_0 \in D$ 不正规, 则对于任意给定的 $\alpha \in (0, k)$, 存在 D 中点列 $z_n \to z_0$, 正数序列 $\rho_n \to 0$, 函数序列 $f_n \in F$ 使得 $\rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n \zeta)$ 在任意的圆 $\{|\zeta| \leq R\}$ 上按球面距离一致收敛到 ζ 平面上的一个非常数的亚纯函数。

2　定理 4 的证明

由定理 2, 可以证明定理 4 的必要性。下面证明定理 4 的充分性。

反设 F 在 $z_0 \in D$ 不正规。取 $K = \{|z - z_0| \leq r_0\} \subset D$, 由定理4 的条件知存在 $\lambda > 2$、$M_K > 0$ 使

$$\iint_K \left(\frac{f^{(k)}(z)}{1+|f(z)|^{k+1}}\right)^{\lambda} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq M_K,$$

对于族 F 中每个函数都成立。由 F 在 $z_0 \in D$ 不正规及引理知对于 $\alpha = k - 1$, 存在函数序列 $f_n \in F$, D 中点列 $z_n \to z_0$, 正数序列 $\rho_n \to 0$ 使

$$g_n(\zeta) = \rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n \zeta),$$

按球面距离内闭一致收敛到 ζ 平面上一个非常数亚纯函数 $g(\zeta)$。显然, $g_n^{(k)}(\zeta)$ 也内闭一致收敛于 $g^{(k)}(\zeta)$。Hurwitz 定理表明 $g(\zeta)$ 的零点重级$\geq k$, 从而 $g(\zeta)$ 非 $k-1$ 次以下多项式, 故 $g^{(k)}(\zeta) \neq 0$。

令 $\Delta_0 = \{|\zeta - \zeta_0| \leq \rho_0\}$, 其中 ζ_0 为 ζ 平面上一点, 满足 $g(\zeta_0) \neq \infty$, ρ_0 为任意指定的正数, 且令 $E_n = \{|z - (z_n + \rho_n \zeta_0)| \leq \rho_n \rho_0\}$, 显然, 当 n 充分大时, $E_n \subset K$。由 $g^{(k)}(\zeta) \neq 0$ 知以下的极限值为正数:

$$\iint_{\Delta_0} \left(\frac{g_n^{(k)}(\zeta)}{1+|g_n(\zeta)|^{k+1}}\right)^{\lambda} \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \to \iint_{\Delta_0} \left(\frac{g^{(k)}(\zeta)}{1+|g(\zeta)|^{k+1}}\right)^{\lambda} \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta > 0, \quad \text{当 } n \to \infty \text{ 时。}$$

所以

$$\iint_{E_n} \left(\frac{f_n^{(k)}(z)}{1+|f_n(z)|^{k+1}}\right)^{\lambda} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho_n^2 \iint_{\Delta_0} \left(\frac{f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \zeta}{1+|f_n(z_n + \rho_n \zeta}^{k+1}\right)^{\lambda} \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \geq$$

$$\rho_n^{2-\lambda} \iint_{\Delta_0} \left(\frac{g_n^{(k)}(\zeta)}{1+|g_n(\zeta)|^{k+1}}\right)^{\lambda} \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \to \infty, \quad \text{当 } n \to \infty \text{ 时。}$$

另一方面,

$$\iint_{E_n} \left(\frac{f_n^{(k)}(z)}{1+|f_n(z)|^{k+1}}\right)^{\lambda} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint_K \left(\frac{f_n^{(k)}(z)}{1+|f_n(z)|^{k+1}}\right)^{\lambda} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq M_K, \quad n \text{ 适当大。}$$

与前矛盾。定理 4 证毕。

参考文献:

[1] MARTY F. Recherches sur la repartition des valeurs d´une fonction meromorphe[J]. Ann Fac Sci Univ Toulouse, 1931, 23(3): 183～261

[2] 李松鹰, 谢晖春. 关于亚纯函数正规族[J]. 数学学报, 1986, 29(4): 468～476

[3] AULASKARI R, LAPPAN P. "Some integral conditions involving the special derivatives" in complex analysis[R]. Lecture Notes In Mathematics, 1987

[4] CHEN Huaihui, GU yongxin. An improvement of Marty´s criteria and its applications[J]. Science In China(Series A), 1993, 23(2): 123～129

A note on Marty´s criteria

Zhang Taiz-hong

(Department of Mathmatics, NIM, Nanjing 210044)

Abstract: The normal criteria is proved in the paper, which improves the results of Marty, Li Songying and Xie Huichun, and Aulaskari and Lappan, etc.

Key words: meromorphic function; holomorphic function; normal criteria