

文章编号: 1000-2022(2000)-01-0063-05

暴雨强度公式参数估计及其应用*

顾骏强 徐集云 陈海燕 黄建萍

(浙江省气候中心, 杭州 310017)

摘要: 利用最优化法实现非线性模型参数的数值解法, 应用于暴雨强度公式参数估计, 提高了公式参数估计的精度。该方法可广泛应用于多参数模式的优化问题。

关键词: 非线性模型; 暴雨强度公式; 参数估计; 数值计算

中图分类号: P333.2 文献标识码: A

暴雨强度公式是计算雨水排水设计流量的根本依据, 它直接影响到排水工程的投资预算和可靠性。根据《室外排水设计规范(GBJ14-87)》^[1]规定, 在进行城市排水管网设计时, 雨水管网的设计排水量应通过当地的暴雨强度公式计算。城市排水工程的可靠性与采用的暴雨强度公式有直接的关系, 而排水工程直接影响到城市防灾减灾的功能和城市环境。因此, 编制各地暴雨强度公式具有重要的现实意义。

国家规范给定的暴雨强度公式形式为一非线性模型, 过去对公式中的参数通过经验值、解析图解或摆试法确定, 然后利用线性最小二乘法确定公式中的其他参数^[2]。文献[3, 4]利用最优化方法解非线性超定方程组, 也有用加速遗传算法^[5]对暴雨强度公式参数估计进行研究, 但具体应用的对象均为暴雨强度公式的参数估计。本文利用最优化问题的求解方案, 较好地解决非线性模型的参数求解问题, 实现的模式参数求解方法具有广泛的适用性。在编程中, 充分考虑计算机数值计算能力, 有效地控制了迭代误差, 提高了暴雨强度公式参数估计精度。

1 非线性模型参数估计方法

暴雨强度公式是一非线性模型, 对于非线性系统数值求解通常采用迭代法。非线性方程的一般形式为: 给定 m 个函数 $f_i (i = 1, 2, \cdots, m)$, f_i 包含 n 个未知参数变量, 即

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \\ \cdots \cdots \cdots \\ f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad n \leq m. \quad (1)$$

参数的估计问题, 就是设法确定 n 个参数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使实际上的特性函数 f 在 ω 的某一区 $[\alpha, \beta]$ 上逼近规定的特性函数 $\psi(\omega)$, 并令其达到指定的精确度 ϵ , 即

$$\max_{\alpha \leq \omega \leq \beta} |f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \omega) - \psi(\omega)| \leq \epsilon. \quad (2)$$

* 收稿日期: 1999-06-04; 改回日期: 1999-11-30
基金项目: 浙江省重大科研项目(991103364)资助
作者简介: 顾骏强, 男, 上海市人, 1962 年 12 月生, 高级工程师。主要研究方向: 应用气象, 自然灾害学

为了方便求解, 将其离散化; 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上取 m 个 ω 值, $\omega, \omega, \cdots, \omega_n$ 。令

$$\Psi = \Psi(\omega), \quad (3)$$

则(1)式可近似表示成

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \omega) - \Psi_i \leq \epsilon, \quad i = 1, 2, \cdots, m. \quad (4)$$

令

$$\mathcal{Q}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \min \sum_{i=1}^m f_i^2(x_1, x_2, \cdots, x_n). \quad (5)$$

因此, 问题化成求参数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使函数 $\mathcal{Q}$ 为极小。其中 $\mathcal{Q}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \omega) - \Psi_i, i = 1, 2, \cdots, m$, 故非线性方程组的求解问题即化成一个无约束最优化问题。

由于(5)式是参数变量的二次函数, 故其最小值总存在。用 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 表示以 $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_m(\mathbf{x})$ 为分量的 m 维向量, 则

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})^T \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|^2. \quad (6)$$

因为 $\frac{\partial \mathcal{Q}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 2 \sum_{i=1}^m f_i(\mathbf{x}) \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}, j = 1, 2, \cdots, n$ 。所以

$$\therefore \mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} f_i(\mathbf{x}) \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_n} f_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = 2\mathbf{A}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (7)$$

式中 $\mathbf{A} = [a_{ij}], a_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}, i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$ 。

设 $\mathbf{x}_0$ 是初始值, 令

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}. \quad (8)$$

将函数 $f_i(\mathbf{x})$ 在点 $\mathbf{x}_0$ 展开为泰勒(Taylor)级数, 并略去二次项以上的展开项, 得

$$f_i(\mathbf{x}) \approx f_i(\mathbf{x}_0) + f_i(\mathbf{x}_0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0); \quad i = 1, 2, \cdots, m, \quad (9)$$

即

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}_0 + \mathbf{A}_0 \Delta \mathbf{x}. \quad (10)$$

其中 $\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \mathbf{A}_0 = [\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j}]; i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$ 。

根据最小二乘法, 求 $\Delta \mathbf{x}$ 使 $\|\mathbf{A}_0 \Delta \mathbf{x} + \mathbf{f}_0\| = \text{极小}$ 。因为

$$\|\mathbf{A}_0 \Delta \mathbf{x} + \mathbf{f}_0\|^2 = \|\mathbf{f}_0\|^2 + 2\mathbf{f}_0^T \mathbf{A}_0 \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0 \Delta \mathbf{x}. \quad (11)$$

所以(7)式可化成

$$\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0 \Delta \mathbf{x} + \mathbf{A}_0^T \mathbf{f}_0 = 0, \quad (12)$$

则

$$\Delta \mathbf{x} = -(\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0)^{-1} \mathbf{A}_0^T \mathbf{f}_0. \quad (13)$$

在求出 $\Delta \mathbf{x}$ 后, 不直接用 $\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}$ 作为解的第一次近似, 而把 $\Delta \mathbf{x}$ 当作寻查方向。从 $\mathbf{x}_0$ 点出发, 沿该方向用一维寻查方法求函数 $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ 的极小点, 即

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}_0 + t \Delta \mathbf{x}) = \text{极小}. \quad (14)$$

设此时 t 为 t_0 , 则 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + t_0 \Delta \mathbf{x}$ 作为第一近似, 然后用 $\mathbf{x}_1$ 代替 $\mathbf{x}_0$ 重复前述步骤, 直到得出满足精度要求的解为止。

在算法的编程中, 对于差商求偏导数, 利用计算机语言中具有高位精度的扩展型实数作处理, 以使误差控制在 $10^{-7} \sim 10^{-5}$ 范围内, 保证数值迭代的计算精度。

2 暴雨强度公式参数估计

根据我国现行室外排水设计规范(GBJ14-87)^[1], 暴雨强度公式的形式为

$$I = \frac{A_1 \times (1 + C \times \lg T)}{(t + B)^N}。$$

(15)

式中 I 为暴雨强度(mm/min), t 为降水历时(min), T 为重现期, A_1 、 C 、 B 、 N 为地方性参数。编制暴雨强度公式就是根据当地降雨的自记雨量记录推求(15)中的参数。当确定某一重现期时, 即(15)式的分子部分为一参数, 假设为 A , 此时公式称做暴雨强度分公式; 相应地(15)式也可称做暴雨强度总公式。根据前面的讨论, 可将暴雨强度公式编制涉及的非线性模型参数估计求解问题化为多元函数的极小化问题, 这也就是通常指的非线性最小二乘问题(简称 NLS)。根据式(15), 可将(1)式中的 f_i 具体表示为:

$$f_i(A_1, C, B, N) = I_i - \frac{A_1 + C \times \lg T_i}{(t_i + B)^N}; \quad I = 1, 2, \cdots, m。$$

(16)

m 为暴雨强度样本数。当估计暴雨强度分公式参数时, 即 $n=3$, f_i 中包含三个参数。通过前述数值计算法则可对参数作求解。过去关于暴雨强度公式参数估计已有一些研究与应用^[2~6], 在文献[5, 6]中分别用不同的方法对同一例子作计算, 这里利用 NLS 数值求解方法对该例子进行计算, 并比较各种方法的计算结果。表 1 给出暴雨强度公式各种参数估计方法对同一算例计算结果的绝对均方差, 可见, NLS 法对参数估计计算精度较高, 表明该方法对公式的拟合效果有明显提高。另外, 根据文献[4]提供的数据, 利用 NLS 方法对上海地区的暴雨强度总公式参数作估计, 并与文献中给出的总公式编制误差做比较(表 2)。从表 2 的绝对均方差不难看出, NLS 法的计算误差比文献介绍计算结果偏小 17.5%, 进一步说明本文实现对暴雨强度公式参数估计方法, 其计算精度比过去使用的方法有明显提高。

表 1 各参数估计方法拟合效果

Table 1 Fitting effects of different parameter estimation methods				
重现期(a)	传统法	优选法 ^[6]	AGA 法 ^[5]	NLS 法
0.25	0.013	0.007 5	0.007 7	0.006 7
0.33	0.013	0.007 3	0.008 2	0.008 2
0.50	0.013	0.007 5	0.008 5	0.008 2
1.00	0.016	0.012 0	0.011 8	0.013 7
2.00	0.019	0.019 0	0.019 1	0.019 7
5.00	0.031	0.030 0	0.030 2	0.027 1
10.00	0.040	0.039 0	0.056 5	0.038 8
20.00	0.048	0.046 0	0.045 7	0.044 2
50.00	0.057	0.055 0	0.054 7	0.044 3
100.00	0.072	0.069 0	0.067 2	0.067 3
平均	0.032 2	0.029 2	0.030 9	0.027 8

表 2 上海暴雨强度总公式参数的两种估计方法比较

Table 2 Comparison between two parameters estimation methods in
torrential rain intensity general formula in Shanghai

	A_1	C	B	N	σ
文献[4]	9.450 0	0.718 9	5.540 0	0.651 4	0.066 4
NSL 法	9.727 0	0.677 9	5.965 4	0.652 1	0.064 7

注: σ 表示绝对均方差

3 公式参数估计的应用

根据绍兴市 1963~1995 年逐日降水自记记录,按 5、10、15、20、30、45、60、90、120 min 9 个降水历时,每一年都挑选并摘录不同场次降水各历时最大的 8 组雨量数据。这样,每个历时都可得到 264 个样本,通过计算机处理,将各历时样本数据按从大到小顺序排列,并取每个历时的前 132 个样本构成暴雨抽样的基本数据。每个历时 132 个样本恰是资料年限长度的四倍,因此通过转换可计算出满足排水设计需要最小重现期为 0.25 a 暴雨强度理论值;同时,这种采集方法可克服采样时遗漏大降雨记录的可能。利用指数分布函数对各历时抽样频数分布进行拟合,则得到各种重现期下暴雨强度的理论计算值(表 3)。

表 3 绍兴各历时不同重现期的暴雨强度

Table 3 Torrential rainfall intensity of different durations
and return periods in Shaoxing

	and return periods in Shaoxing							mm/min	
重现期 _(a)	5 min	10 min	15 min	20 min	30 min	45 min	60 min	90 min	120 min
0.25	1.363	1.109	0.895	0.755	0.573	0.426	0.344	0.261	0.214
0.33	1.508	1.216	0.996	0.845	0.648	0.486	0.393	0.296	0.241
0.50	1.723	1.375	1.147	0.980	0.760	0.574	0.467	0.348	0.283
1.00	2.083	1.642	1.399	1.205	0.947	0.722	0.589	0.435	0.351
2.00	2.443	1.908	1.651	1.430	1.134	0.870	0.711	0.522	0.420
3.00	2.654	2.064	1.799	1.562	1.234	0.957	0.783	0.573	0.460
5.00	2.919	2.260	1.985	1.728	1.381	1.066	0.873	0.637	0.511
10.00	3.280	2.526	2.237	1.953	1.568	1.214	0.995	0.724	0.579
20.00	3.640	2.793	2.489	2.178	1.755	1.362	1.118	0.811	0.648
50.00	4.116	3.145	2.822	2.476	2.003	1.558	1.279	0.926	0.739
100.00	4.476	3.411	3.074	2.701	2.190	1.706	1.402	1.012	0.808

根据表 3 中的数据,利用前述的非线性模型参数估计方法,可求出各指定重现期下的暴雨强度分公式参数,及不定重现期时的暴雨强度总公式参数。在计算过程中,根据经验可先给出初值进行迭代,这样可节省运算时间;运算时间同时还受计算机配置的制约。对照式(15)得到绍兴市暴雨强度总公式的参数估计为: $A_1=21.517$ 、 $C=0.596\ 0$ 、 $B=12.075$ 、 $N=0.829\ 4$,其绝对均方差和相对均方差分别为 0.042 5、3.043 %。分公式的参数估计值见表 4。

4 结束语

本文为解决暴雨强度公式编制过程中的非线性模型的参数估计问题, 利用最优化法对非线性超定方程组的求解作了探讨, 并实现相应的数值算法, 使暴雨强度公式的参数估计精度明显提高。由于本文实现的参数估计方法在理论上对非线性模型的形式和参数估计个数没有限制, 因此该方法可广泛运用于各类非线性模型的参数估计。在暴雨强度公式的实际应用中, 表明该算法有具较高的计算精度。

表 4 绍兴市暴雨强度分公式参数估计
Table 4 Parameter estimation of torrential
rain intensity divers formula in Shaoxing

重现期(a)	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>N</i>	σ
0.25	23.827	13.235	0.982 3	0.014 5
0.33	26.053	13.671	0.971 5	0.012 5
0.50	28.170	13.870	0.950 3	0.010 5
1.00	28.866	13.315	0.904 9	0.011 5
2.00	33.212	13.679	0.893 4	0.020 0
3.00	34.210	13.483	0.879 0	0.024 5
5.00	31.418	12.233	0.838 0	0.029 4
10.00	38.090	13.614	0.850 1	0.040 1
20.00	37.239	12.277	0.820 8	0.048 7
50.00	45.840	13.240	0.835 5	0.062 9
100.00	45.688	12.616	0.815 3	0.071 6

参考文献:

[1] 室外排水工程规范.GBJ14-87[S]. 北京: 中国建筑工程出版社, 1988
[2] 给水排水设计手册. 第5册[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1985
[3] 邓培德, 韦鹤平, 俞庭康, 等. 城市暴雨公式统计方法的研究[J]. 同济大学学报, 1985, (1): 17~29
[4] 严济远, 朱 琛, 徐家良, 等. 上海地区短历时暴雨强度公式的研究[C]. 见: 上海台风研究所编. 大气科学研究与应用. 北京: 气象出版社, 1991. 67~74
[5] 杨晓华, 金菊良, 张国桃. 加速遗传算法及其在暴雨强度公式参数优化中的应用[J]. 自然灾害学报, 1998, 7(3): 71~75
[6] 杨 开, 程晓如. 暴雨强度公式中系数 B 统计算法一例[J]. 人民长江, 1996, 27(3): 16~22

Parameter estimation in torrential rain intensity formula with its application

GU Jun-qiang, XU Ji-yun, CHEN Hai-yan, HU ANG Jian-ping
(Climate Center of Zhejiang Province, Hangzhou 310017)

Abstract: A numerical calculation method is presented for parameter estimation based on the technique of solving nonlinear model. The accuracy of parameter estimation in torrential rain intensity formula is improved. The method may be widely used to optimize other multivariate parameters in the model.

Key words: nonlinear model; torrential rain intensity formula; parameter estimation; numerical calculation