第 23 卷第 1 期　　南 京 气 象 学 院 学 报　　Vol. 23 No. 1
2000 年 3 月　　Journal of Nanjing Institute of Meteorology　　Mar. 2000

文章编号: 1000-2022(2000)-01-0036-06

具有对数正态分布几何过程的统计推断*

吕纯濂[1], 陈舜华[2]

(南京气象学院 1. 数学系; 2. 环境科学系, 南京　210044)

摘要: 在假定几何过程的初始分布为对数正态分布的前提下, 研究了几何过程的统计推断问题。对其中的参数分别用极大似然法和改进的矩法进行了估计。然后, 在理论推导、模拟试验和实际数据分析的基础上提出了一些建议。

关　键　词: 几何过程; 极大似然估计; 矩估计; 渐近相对有效性

中图分类号: O212.4　　文献标识码: A

1　定义和概念

对来自具有趋势项点过程的一组数据进行建模时, 一种直接的方法是用某种单调过程对这些数据进行模拟, 作为这种特殊的单调过程, 现介绍所谓的几何过程的定义[1]。

定义　设 $X_1, X_2, \cdots$ 为一组非负随机变量, 若存在实常数 $a > 0$, 使 $\{a^{i-1}X_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 构成更新过程(RP-Renewal Process)的更新间隔[2], 则称 $\{X_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 为几何过程(GP-Geometric Process), 而该实常数 a 称为几何过程的比。

显然, 若 $a \geq 1$, 则几何过程是随机非升的; 若 $0 < a \leq 1$, 则几何过程是随机非降的; 若 $a = 1$, 则几何过程简化为更新过程。进而, 若给定具有比 a 的几何过程 $\{X_i, i = 1, 2, \cdots\}$, 则有

$$E(X_i) = \lambda / a^{i-1}, \qquad Var(X_i) = \sigma^2 / a^{2(i-1)}。\tag{1}$$

其中 λ 和 σ^2 分别为 X_1 的均值和方差。因此, a、λ 和 σ^2 就是几何过程 $\{X_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 的 3 个重要的参数。

现提出三个问题。第一, 给定一组数据 $\{X_i, i = 1, 2, \cdots\}$, 如何检验它是否与几何过程一致? 第二, 若一组数据确来自几何过程, 又如何估计它的参数 a, λ 和 σ^2? 第三, 如何评价这些估计?

为回答第一个问题, 引出以下辅助随机变量

$$U_j = X_{2j} / X_{2j-1}, j = 1, \cdots, M, \tag{2}$$

和

$$V_j = \begin{cases} X_{j+1}X_{n+1-j}, & n \text{ 为奇数;} \\ X_j X_{n+1-j}, & n \text{ 为偶数。} \quad j = 1, 2, \cdots, M。 \end{cases} \tag{3}$$

其中 $M = [n/2]$。容易证明, 若 $\{X_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 为几何过程, 则所有 U_j 和 V_j 是独立同分布(IID)的随机变量, 且反之亦然。这样, 就可通过检验所有 U_j 和 V_j 是否是独立同分布(IID)的

* 收稿日期: 1999-04-22; 改回日期: 1999-09-21

作者简介: 吕纯濂, 男, 上海市人, 1939 年 8 月生, 教授。主要研究方向: 多元统计, 统计计算, 数量经济学

随机变量, 而知$\{X_i, i=1,2,\cdots\}$是否为几何过程。为此, 对所有U_j和V_j可应用TP-检验或DS-检验[3]。

为解决第二个问题, 假定数据集$\{X_i, i=1,2,\cdots,n\}$已与几何过程一致, 则令

$$Y_i = a^{i-1}X_i, \qquad i=1,\cdots,n。\tag{4}$$

显然, 所有Y_i为IID随机变量。进而, 记$E(\ln Y_i)=\mu$, $\tau^2=Var(\ln Y_i)$, 用最小二乘法得μ, $\ln a$和τ^2的最小二乘估计(LSE)如下[4]

$$\hat{\mu} = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}(2n-3i+2)\ln x_i, \tag{5}$$

$$\hat{\varphi} = \ln \hat{a} = \frac{6}{(n-1)n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)\ln x_i, \tag{6}$$

和

$$\hat{\tau}^2 = \{\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2 - (\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2/n - \hat{\varphi}\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)\ln x_i/2\}/(n-2)。\tag{7}$$

因此, a的非参数估计为

$$\hat{a} = \exp(\hat{\varphi})。\tag{8}$$

进而, 有λ和σ^2的以下估计[4]

$$\hat{\lambda}_M = \begin{cases} \hat{\bar{y}} & a \neq 1 \\ \bar{y} & a = 1, \end{cases} \tag{9}$$

$$\hat{\sigma}_M^2 = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \hat{\bar{y}})^2/(n-1) & a \neq 1 \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/(n-1) & a = 1。\end{cases} \tag{10}$$

其中, $\hat{y}_i = \hat{a}^{i-1}x_i$, $\hat{\bar{y}} = \sum_{i=1}^{n}\hat{y}_i/n$, $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n}x_i/n$, $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n}y_i/n$。由(8)～(10)式得到的估计称为改进的矩估计(MME), 这是因为λ和σ^2由矩法得到, 但$\hat{a}$是由最小二乘法得到的。

为研究第三个问题, 对估计量$\hat{a}$, $\hat{\lambda}_M$和$\hat{\sigma}_M^2$有以下渐进正态性定理[4]。

定理 1　(1) $n^{3/2}(\hat{a}-a) \xrightarrow{L} N(0, 12a^2\tau^2)$;

(2) $n^{1/2}(\hat{\lambda}_M - \lambda) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2 + 3\lambda^2\tau^2 I(a))$;

(3) $n^{1/2}(\hat{\sigma}_M^2 - \sigma^2) \xrightarrow{L} N(0, \omega^2 + 12\sigma^4\tau^2 I(a))$。

其中$I(a) = \begin{cases} 0, a=1 \\ 1, a\neq 1 \end{cases}$　$\omega^2 = Var(X_1-\lambda)^2$。

为检验原假设$H_0: a=1$和备择假设$H_1: a\neq 1$, 可用以下统计量

$$T = \frac{n^{3/2}(\hat{a}-1)}{\sqrt{12}\hat{\tau}}。\tag{11}$$

在H_0成立的条件下, 渐近地有$T \sim N(0,1)$。

本文将从不同的观点考虑几何过程。在第 2 节中, 对参数a、λ和σ^2用极大似然估计(MLE)进行研究, 并与改进的矩估计(MME)进行比较; 第 3 节将作一些随机模拟试验; 第 4 节分析三组实际数据; 在以上研究的基础上, 在最后第 5 节中提出一些结论和建议。

2　几何过程的推断

设$\{X_i, i=1,2,\cdots\}$构成具有比a的几何过程, 且X_1服从对数正态分布$LN(\mu,\tau^2)$, 密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\tau x}\exp\left[-\dfrac{1}{2\tau^2}(\ln x-\mu)^2\right] & x>0\\ 0 & x\le 0。\end{cases}\tag{12}$$

注意, 现在

$$E(\ln Y_i)=E(\ln X_1)=\mu,\quad Var(\ln Y_i)=Var(\ln X_1)=\tau^2。$$

进而有

$$\lambda=E(X_1)=\exp(\mu+\tau^2/2)$$

和

$$\sigma^2=Var(X_1)=\lambda^2[\exp(\tau^2)-1]。\tag{13}$$

令 a, μ 和 τ^2 的极大似然估计(MLE) 分别为 $\hat{a}_L$, $\hat{\mu}_L$ 和 $\hat{\tau}_L^2$, 显然, 似然函数为

$$L=[(2\pi)^{n/2}\tau^n\prod_{i=1}^{n}x_i]^{-1}\exp\{-\frac{1}{2\tau^2}\sum_{i=1}^{n}[\ln(a^{i-1}x_i)-\mu]^2\}。$$

使其达极大, 用微分法易知 MLE $\hat{a}_L$, $\hat{\mu}_L$ 和 $\hat{\tau}_L^2$ 满足以下方程

$$\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)\ln(a^{i-1}x_i)=0,\tag{14}$$

$$\mu=\sum_{i=1}^{n}\ln(a^{i-1}x_i)/n,\tag{15}$$

$$\tau^2=\sum_{i=1}^{n}[\ln(a^{i-1}x_i)-\mu]^2/n。\tag{16}$$

由(14) 式可得

$$\ln\hat{a}_L=-\left[\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)\ln x_i\right]/\left[\sum_{i=1}^{n}(i-1)(n-2i+1)\right]=$$

$$\frac{6}{(n-1)n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)\ln x_i。\tag{17}$$

将(17) 式代入(15) 式得

$$\hat{\mu}_L=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(i-1)\ln\hat{a}_L+\ln x_i]=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}(2n-3i+2)\ln x_i。\tag{18}$$

因而, 借助于(17) 式, 由(16) 式得

$$\hat{\tau}_L^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{(i-1)\ln\hat{a}_L+\ln x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(i-1)\ln\hat{a}_L+\ln x_i]\}^2=$$

$$\frac{1}{n}\{\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2-(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2/n-\ln\hat{a}_L\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)\ln x_i/2\}。\tag{19}$$

这样, 与(5)～(7) 式比较得以下结论。

定理 2 (1) $\hat{a}_L=a$; (2) $\hat{\mu}_L=\hat{\mu}$; (3) $\hat{\tau}_L^2=(n-2)\hat{\tau}^2/n$; 且 λ 和 σ^2 的极大似然估计(MLE) 分别为

$$\hat{\lambda}_L=\exp(\hat{\mu}_L+\hat{\tau}_L^2/2),\tag{20}$$

$$\hat{\sigma}_L^2=\hat{\lambda}_L^2(\exp(\hat{\tau}_L^2)-1)。\tag{21}$$

若已知 a 为 1, 在(15) 和(16) 式中参数 μ 和 τ^2 的极大似然估计(MLE) 分别为

$$\hat{\mu}_L=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \text{ 和 } \hat{\tau}_L^2=\frac{1}{n}\{\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2-(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2/n\}。$$

现研究极大似然估计(MLE) $\hat{a}_L$, $\hat{\lambda}_L$ 和 $\hat{\sigma}_L^2$ 的渐近性质。首先, 注意到 $\hat{\mu}$、$\hat{\varphi}$和 $\hat{\tau}^2$ 是 μ、φ和 τ^2

的最小二乘估计(LSE) , 故有以下两引理。

引理 **1**[5]　(1) $\begin{pmatrix}\hat{\mu}\\ \hat{\varphi}\end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix}\mu\\ \varphi\end{pmatrix}, \frac{2\tau^2}{n(n+1)}\begin{pmatrix}2n-1 & 3\\ 3 & 6/(n+1)\end{pmatrix}\right)$;

(2) $\frac{(n-2)\hat{\tau}^2}{\tau^2} \sim \chi^2_{n-2}$;

(3) $\begin{pmatrix}\hat{\mu}\\ \hat{\varphi}\end{pmatrix}$ 与 $\hat{\tau}^2$ 独立。

引理 **2**　$n^{1/2}\begin{pmatrix}\hat{\mu}_L-\mu\\ \hat{\tau}_L^2-\tau^2\end{pmatrix} \xrightarrow{L} N_2\left(\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\tau^2 & 0\\ 0 & 2\tau^2\end{pmatrix}\right)$。

证明: 由 Slutsky 定理[6]和引理 1 的(1)以及定理 2 可得

$$n^{1/2}(\hat{\mu}_L-\mu) = n^{1/2}(\hat{\mu}-\mu) \xrightarrow{L} N(0, 4\tau^2),$$

另一方面, 由引理 1 的(2)和定理 2 知 $n\hat{\tau}_L^2/\tau = (n-2)\hat{\tau}^2/\tau$ 为$(n-2)$个具有 $\chi^2(1)$ 分布的 IID 随机变量之和, 故由中心极限定理有

$$\frac{n\hat{\tau}_L^2/\tau^2-(n-2)}{\sqrt{2(n-2)}} = \frac{(n-2)^{1/2}\left(\frac{n}{n-2}\hat{\tau}_L^2-\tau^2\right)}{\sqrt{2}\,\tau^2} \xrightarrow{L} N(0,1),$$

因此有

$$n^{1/2}(\hat{\tau}_L^2-\tau^2) \xrightarrow{L} N(0, 2\tau^4)。$$

注意到 $\hat{\mu}_L$ 与 $\hat{\tau}_L^2$ 独立, 因而完成了引理 2 的证明。

定理 **3**　(1) $n^{3/2}(\hat{a}_L-a) \xrightarrow{L} N(0, 12a^2\tau^2)$;

(2) $n^{1/2}(\hat{\lambda}_L-\lambda) \xrightarrow{L} N(0, \lambda^2\tau^2(4+\tau^2/2))$;

(3) $n^{1/2}(\hat{\sigma}_L^2-\sigma^2) \xrightarrow{L} N(0, 16\sigma^4\tau^2+2\tau^4(\lambda^2+2\sigma^2)^2)$。

证明: 由引理的(1)和 $\hat{a}_L = \exp(\hat{\varphi})$ 可得(1)的结论; 而(2)和(3)可由(20)和(21)式以及引理 2 推得。作为一个例子, 这里给出(2)的证明, 设

$$\lambda = g(\mu, \tau^2) = \exp(\mu+\tau^2/2),$$

则由引理 2 和 Cramer 定理有

$$n^{1/2}(\hat{\lambda}_L-\lambda) \xrightarrow{L} N(0, \sigma_\lambda^2),$$

其中

$$\sigma_\lambda^2 = \begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial \mu} & \frac{\partial g}{\partial \tau^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\tau^2 & 0\\ 0 & 2\tau^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial g/\partial\mu\\ \partial g/\partial\tau^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & \frac{\lambda}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\tau^2 & 0\\ 0 & 2\tau^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \frac{\lambda}{2}\end{pmatrix} = \lambda^2\tau^2\left(4+\frac{\tau^2}{2}\right)。$$

因而完成(2)的证明。(1)和(3)的证明省略。

在定理 1 和定理 3 的基础上, 可以比较极大似然估计法和改进的矩估计法, 为此假设 $a \neq 1$, 则 $\hat{\lambda}_M$ 关于 $\hat{\lambda}_L$ 的渐近相对有效率[6,7]为

$$e(\hat{\lambda}_M, \hat{\lambda}_L) = [\lambda^2\tau^2(4+\tau^2/2)]/(\sigma^2+3\lambda^2\tau^2) = \tau^2(4+\tau^2/2)[(\exp(\tau^2)-1)+3\tau^2] < 1。\tag{22}$$

(22)式由(2)式和对 $x>0$ 有 $e^x > 1+x+x^2/2$ 可得。

为比较 $\hat{\sigma}_L^2$ 关于 $\hat{\sigma}_M^2$ 需要以下引理, 该引理可由归纳法证明。

引理 **3**　$h(n) = 6^n - 4\ 3^n - 2^n(2n^2+1) + 8(n^2+1) > 0, n = 0, 1, 2, \cdots$。

假定 $a \neq 1$, 易知 X_1 的 r 阶矩为

$$EX_1^r = \exp\left(r\mu + \frac{1}{2}r^2\tau^2\right),$$

因 $X_1 \sim LN(\mu, \tau^2)$，则由(2)式有

$$\omega^2 = Var(X_1 - \lambda)^2 = E[(X_1 - \lambda)^2 - \sigma^2]^2 =$$
$$\lambda^4[\exp(6\tau^2) - 4\exp(3\tau^2) - \exp(2\tau^2) + 8\exp(\tau^2) - 4],$$

进而有

$$\omega^2 + 12\sigma^4\tau^2 - [16\sigma^4\tau^2 + 2\tau^4(\lambda^2 + 2\sigma^2)^2] = \lambda^4 \sum h(n)\tau^2 n/n! > 0。 \tag{23}$$

(23)式由Taylor展开可得。

因而，$\hat{\sigma}_L^2$ 关于 $\hat{\sigma}_M^2$ 的渐近相对有效率为

$$e(\hat{\sigma}_M^2, \hat{\sigma}_L^2) = [16\sigma^4\tau^2 + 2\tau^4(\lambda^2 + 2\sigma^2)^2]/(\omega^2 + 12\sigma^4\tau^2) < 1。 \tag{24}$$

将(23)和(24)式结合在一起得到以下结果。

定理 4 (1) $e(\hat{\lambda}_M, \hat{\lambda}_L) < 1$; (2) $e(\hat{\sigma}_M^2, \hat{\sigma}_L^2) < 1$。

故若 $a \neq 1$，则 $\hat{\lambda}_L$ 比 $\hat{\lambda}_M$ 更有效，因而比 $\hat{\lambda}_M$ 更好；类似地 $\hat{\sigma}_L^2$ 比 $\hat{\sigma}_M^2$ 更有效，因而比 $\hat{\sigma}_M^2$ 更好。

3 随机模拟试验

首先，以比 a 分别为 0.90、0.95、1.00、1.05 和 1.10 产生几何过程(GP)$\{X_i, i = 1, 2, \cdots\}$，其中 X_1 分别关于(μ, τ^2)为(2.0, 0.6)、(0.4, 0.4)、(1.0, 0.2)和(0.5, 0.6)服从对数正态分布 $LN(\mu, \tau^2)$。由于在实际中几何过程的趋势都较小，故这里比 a 的选择接近于 1。数据容量分别是 21、41、61 和 81。然后，对每一参数的组合，要作 300 次随机模拟试验($I = 300$)。为此，用 GAUSS 矩阵语言系统[8]中 RNDNS 的种子值方法产生 IID 正态随机变量序列，经适当变换使得成为每一个具有对数正态分布 $LN(\mu, \tau^2)$ 的 IID 的随机变量序列$\{Y_i, i = 1, 2, \cdots\}$，再经变换

$$X_i = Y_i / a^{i-1}, \tag{25}$$

则数据集合$\{X_i, i = 1, 2, \cdots\}$为具有 $X_1 \sim LN(\mu, \tau^2)$ 和比为 a 的几何过程的一个现实。为获得一个易于比较的可重复的随机模拟试验，用相同的种子数 1234576 产生 300 个现实。

对具有对数正态分布的几何过程的数值结果可看出，被模拟的数据集(25)是几何过程。

为检验过程(25)是否为对数正态分布，可对(25)用 Smirnov 经验分布函数拟合检验和 χ^2 拟合检验是否 $X_1 \sim LN(\mu, \tau^2)$，$i = 1, 2, \cdots, n$。然而，这里对$\{\hat{Y}_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$，$\hat{Y}_i = \hat{a}^{i-1}X_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$ 用以上检验进行时，由于 $\hat{a}$ 是由$\{X_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$估计的，而且 $\hat{Y}_i = \hat{a}^{i-1}X_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$ 既不独立也不同分布，故以上检验是近似的。根据数值结果，被模拟数据集(25)是与具有对数正态分布的几何过程一致的。

最后，对 300 个现实的每一个，进行参数 a，λ 和 σ^2 的 MLE 法估计和 MME 法估计。

然后，用以下 4 种准则对 MLE 和 MME 这两个估计方法进行比较：

$$(1)\ d = \hat{\lambda} - \lambda, \tag{26}$$

$$(2)\ MSE = \sum_{i=1}^{n}(\hat{X}_i - X_i)^2/n, \hat{X}_i = \hat{\lambda}\hat{a}^{i-1}, \tag{27}$$

$$(3)\ D = d + \overline{MSE}, \tag{28}$$

$$(4)\ DV = \hat{\sigma}^2 - \sigma^2。 \tag{29}$$

当然，可以对 d、MSE、D 和 DV 求出 300 个现实的平均值，然后根据它们的大小排序，这种序称为全序；另一方面，也可以就每一个现实对 d、MSE、D 和 DV 排序，然后求出这些序关于

300 个现实的平均值, 这种序称为平均序。除个别特殊情况外, 这两种序是一致的。

为比较 $\hat{\lambda}$, 在参数估计中用 d, 在数据拟合中用 MSE; 若比较参数估计和数据拟合, 则 D 更为合适; DV 则用来比较估计量 $\hat{\sigma}^2$。

一般地, 在数据拟合时建议用 MME 法, 而在参数估计时建议用 MLE 法。然而, 对 σ^2 的估计, MLE 法总比 MME 法好, 应该用 MLE 法。

另外, 随机模拟结果也表明, MLE 法和 MME 法甚至对小容量数据也是可以应用的。

4　讨　论

从模拟结果可看出, $\hat{a}$ 的估计非常接近 a, 这并不奇怪, 因为定理 1 和定理 3 已指出 $\hat{a}$ 的方差具有 n^{-3} 幂。对 $\hat{\lambda}$ 的估计, 定理 4 和模拟结果都指出, 在数据拟合时应该用 MME 法, 而在参数估计时应该用 MLE 法。然而, 对 $\hat{\sigma}$ 的估计, 定理 4 和模拟结果也都指出, MLE 法更好些。

参考文献

[1] LAM Y. A note on the optimal replacement problem[J]. Adv Appl Probab, 1988, 20: 479～482

[2] 邓永录. 随机模型及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 1994. 159～241

[3] ASCHER H, FEINGOLD H. Repairable systems reliability[M]. New York: Marcel Dekker, 1984

[4] LAM Y. Nonparametric inference for geometric processes[J]. Commun Statist Theory Meth, 1992, 21: 2083～2105

[5] SEBER G A F. Linear regression analysis[M]. New York: Wiley, 1977

[6] LEHMANN E L. Theory of point estimation[M]. New York: Wiley, 1983

[7] 魏宗舒. 概率论与数理统计教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1997. 271～286

[8] 吕纯濂, 陈舜华. 矩阵语言与多元分析[M]. 北京: 气象出版社, 1994. 14～177

Statistical inference for geometric process with lognormal distribution

LU Chun-lian[1], CHEN Shun-hua[2]

(1. Department of Mathematics; 2. Department of Environmental Sciences, NIM, Nanjing　210044)

Abstract: Under the assumption that a geometric process at the start point follows a lognormal distribution, the statistical inference problem for the geometric process is studied. The distribution parameters have been estimated with either the maximum likelihood method or a modified moment method. Then some suggestions are made based on the theoretical results, the simulation experiments, and the real data analysis.

Key words: geometric process; maximum likelihood estimate; moment estimate; asymptotic relative efficiency