第22卷 第4期 南京气象学院学报 Vol. 22 No. 4
1999年12月 Journal of Nanjing Institute of Meteorology Dec. 1999

文章编号: 1000-2022(1999)04-0725-05

一个多目标决策问题的非劣解

张建伟[1] 朱玉华[1] 蔡 艳[2]
(南京气象学院 1. 数学系; 2. 大气科学系, 南京 210044)

摘要: 给出 CMCM-1998A 题(一个双目标决策问题)的非劣解求法, 并说明其在 R^n 空间中的意义, 对于 $n=1$、2、3 的情形, 还给出几何直观解释。

关 键 词: 多目标规划; 非劣解; 超平面
中图分类号: O224 文献标识码: A

1 问题与解

CMCM-1998A 题[1](原题略)是一个双目标决策问题[2]。一般学生都把它化为单目标线性规划来求解。但是, 双目标决策问题非劣解的构造, 对于解释计算中出现的各种问题很有意义。例如, 为什么最优方案中有许多 $x_i \times q_i$ 相同, 什么时候最优解不唯一, …。非劣解, 又称为有效解[3], 指的是多目标决策的一个可行解 $\bar{x}$, 对它不存在优于它的解 x^*, 即按所有的目标, $\bar{x}$ 都不比 x^* 差, 但至少有一个目标, 按此目标, x^* 比 $\bar{x}$ 好。由于风险函数不可导, 非劣解难以用 K-T 条件解出, 我们以几何方法给出非劣解的构造。

设 x_i 表示对 S_i 的纯投资额, 因为 M 很大, u_i 的影响可以忽略不计, 又因为 $p_0=0$, 于是总收益为

$$R=\sum_{i=0}^{n}(r_i-p_i)x_i=\sum_{i=1}^{n}(r_i-p_i-p_ir_0)x_i+Mr_0,$$

总风险为

$$Q=\max_{1\le i\le n}q_ix_i,$$

约束条件为

$$\sum_{i=1}^{n}(1+p_i)x_i+x_0=M。$$

由于 $r_i-p_i-r_0(1+p_i)\le 0$ 时, 投资 S_i 不利, 可把投资方式 S_i 略去, 因而总设 $r_i-p_i-r_0(1+p_i)>0$。令

$$y_i=x_i(1+p_i),\ i=1,2,\cdots,n;$$
$$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)';$$
$$a_i=(r_i-p_i-r_0-p_ir_0)/(1+p_i),\ i=1,2,\cdots,n;$$

收稿日期: 1999-05-30; 修订日期: 1999-11-09
作者简介: 张建伟, 男, 1965年1月生, 硕士, 讲师

$$b_i = p_i/(1+p_i);$$
$$\theta(y) = \max_{1\le i\le n} b_i y_i;$$
$$\rho(y) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i。$$

则问题化为

$$\min\left\{\begin{matrix}\theta(y) & \sum_{i=1}^{n} y_i \le M, y \ge 0 \\ -\rho(y) & \sum_{i=1}^{n} y_i \le M, y \ge 0\end{matrix}\right\}。$$

不妨设 $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n$, 令可行解集 $\Lambda = \{y \ \sum_{i=1}^{n} y_i \le M, y \ge 0\}$; 令非劣解集

$$S = \{y^* \ y^* \in \Lambda, 不存在 y \in \Lambda, \theta(y) \le \theta(y^*), 且 \rho(y) > \rho(y^*);$$
$$也不存在 y \in \Lambda, \rho(y) \ge \rho(y^*), 且 \theta(y) < \theta(y^*)\}。$$

由于 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$ 时, $\theta(y) = 0, \rho(y) = 0$, 而当 $y \ne 0$ 时, $\theta(y) > 0$, 我们有结论 1。

结论 1 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$ 是非劣解。

对于 Λ 的内点, 可得 y 是非劣解的充要条件。

定理 1 设 y^0 是 Λ 的内点, 则 y^0 为非劣解的充要条件是:

$$y_1^0 b_1 = y_2^0 b_2 = \cdots = y_n^0 b_n, \quad y^0 = (y_1^0, \cdots, y_n^0)'。$$

证明 必要性: 反证法。若 $y_i^0 b_i$ 不全相等, 总有一些 $y_i^0 b_i$ 取最大值, 另一些小于它们, 无妨设 $y_1^0 b_1 = y_2^0 b_2 = \cdots = y_k^0 b_k; y_j^0 b_j < y_1^0 b_1, j \ge k+1$, 则令 $y_i^* = y_i^0 - \epsilon/a_i, 1 \le i \le k$; $y_{k+1}^* = y_{k+1}^0 + k\epsilon/a_{k+1}$; $y_j^* = y_j^0, j \ge k+2$。正数 ϵ 取充分小, 使 $y^* \in \Lambda$, $(y_{k+1}^0 + k\epsilon/a_{k+1}) b_{k+1} < y_1^0 b_1$。则 $\rho(y^*) = \rho(y^0)$, 而 $\theta(y^*) < \theta(y^0)$, 所以, y^0 不是非劣解。

充分性: 设 y^* 是内点, $y_1^* b_1 = y_2^* b_2 = \cdots = y_n^* b_n$, 超平面 $\rho(y) = \rho(y^*)$ 将 Λ 分为 3 部分, 分别满足: $\rho(y) > \rho(y^*)$, $\rho(y) = \rho(y^*)$, $\rho(y) < \rho(y^*)$。若 $\rho(y) < \rho(y^*)$, 显然 y 不比 y^* 优; 如果 $\rho(y) = \rho(y^*)$, 令 U 是 y^* 闭邻域, 由于 $\theta(y)$ 在紧集 $U \cap \{\rho(y) = \rho(y^*)\}$ 上取最小值[4], 而类似必要性证明知: $\{\rho(y) = \rho(y^*)\}$ 上的点, 只有 $y_i b_i$ 相等时 $\theta(y)$ 最小, 所以, 超平面 $\rho(y) = \rho(y^*)$ 上的点都不比 y^* 优; 若 $\rho(y) > \rho(y^*)$, 令 $\lambda = \rho(y^*)/\rho(y) < 1$, 由 $\rho(y^*)$ 的线性可知: $\rho(\lambda y) = \rho(y^*)$, 由于 $\theta(y) \ge \theta(\lambda y) \ge \theta(y^*)$, y 也不比 y^* 优。所以 y^* 是非劣解。

结论 2 令 $\tilde{y}_i = M/[b_i(\sum_{j=1}^{n} b_j^{-1})]$, $i = 1, 2, \cdots, n$; $A = (\tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_n)$, Λ 内部的非劣解是线段 OA。

由定理 1 知, 当银行存款不为 0 时, 若 x 是非劣解, 则必有: $x_1 q_1 = x_2 q_2 = \cdots = x_n q_n$。令:

$$\bar{\Lambda} = \{y \ \sum_{i=1}^{n} = M, y_i \ge 0, i = 1, 2, \cdots, n\}。$$

考虑 $\bar{\Lambda}$ 上的非劣解, 令

$$\pi_d = \{y \ \theta(y) \le d, y \ge 0\}; \pi_d = \{y \ \theta(y) = d, y \ge 0\}。$$

显然, $\pi_d = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{n} \{b_i y_i = d \ge b_j y_j, y \ge 0\}$ 。

$n = 2$ 时, π_d 是第一象限内两边在 y_1 轴、y_2 轴上, 边长为 d/b_1、d/b_2 的长方形; π_d 是其不在 y_1 轴、y_2 轴上的两边。$n = 3$ 时, π_d 是第一象限内 3 侧面在 y_1y_2、y_2y_3、y_3y_1 坐标面上, 棱长为

d/b_1、d/b_2、d/b_3 的长方体; π_d 是不在坐标面上的 3 侧面。

$n>3$ 时, π_d 可以考虑为 n 维长方体; π_d 是其不在坐标面上的侧面。令 $\alpha=M/\sum b_i^{-1}$, $\beta=M\cdot\max\limits_{1\le i\le n} b_i$, $\Lambda_d=\pi_d\cap\Lambda$, $\bar{\Lambda}_d=\bar{\pi}_d\cap\Lambda$, $\alpha\le d\le\beta$, 则 Λ_α 过 A 点, $\Lambda_\beta=\Lambda$。

定理 2　设 $y^*\in\bar{\Lambda}_d$, 则 y^* 是非劣解的充要条件是 y^* 使 $\rho(y)$ 在 $\bar{\Lambda}_d$ 上取最大值, 且

$$\theta(y^*)=\min\{\theta(y)\ \ y\in\bar{\Lambda},\rho(y)=\rho(y^*)\}。$$

证明　必要性是显然的, 充分性也很明显: 若 $\theta(y)>d$, 则 $\theta(y)>\theta(y^*)$, y 不比 y^* 优; 若 $\theta(y)\le d$, 由假设条件知, y 也不比 y^* 优。

由定理 2, 我们只须在 $\bar{\Lambda}_d$ 上求非劣解, 这可由定理 3 解决。

定理 3　设 $y\in\bar{\Lambda}$ 是非劣解, $a_j>a_k$, 若 $y_j=0$, 则 $y_k=0$。

证明　反证法。若 $y_k\neq0$, 令 $y_j^0=y_kb_k\epsilon/b_j$; $y_k^0=y_k-y_j^0$; $y_i^0=y_i$, $i\neq j$、k; ϵ 是小于 1 的充分小正数, 使 $y_k^0>0$, 则可以有 $\theta(y^0)\le\theta(y)$, $\rho(y^0)-\rho(y)=a_jy_j^0-a_ky_j^0>0$, y 不是非劣解, 矛盾。

由定理 2 和定理 3, 我们得 $\bar{\Lambda}_d$ 内非劣解集 S_d 的构造方法。

定理 4　设 $a_1=a_2=\cdots=a_{n_1}>a_{n_1+1}=\cdots=a_{n_2}>a_{n_2+1}=\cdots=a_{n_3}>a_{n_3+1}=\cdots$, 则 $\forall\ d\in[\alpha,\beta]$, $S_d=\Lambda\cap\bar{\pi}_d\cap S$。构造如下

(1) 若 $\frac{d}{b_1}+\frac{d}{b_2}+\cdots+\frac{d}{b_{n_1}}>M$, 则 $S_d=\varnothing$。

(2) 若 $\frac{d}{b_1}+\frac{d}{b_2}+\cdots+\frac{d}{b_{n_1}}=M$, 令 $y_i^*=\frac{d}{b_i}$, $i=1,\cdots,n_1$; $y_j^*=0$, $j>n_1$, $S_d=\{y^*\}$。

若 $\frac{d}{b_1}+\frac{d}{b_2}+\cdots+\frac{d}{b_{n_1}}<M$, 则令 $y_i=\frac{d}{b_i}$, $i=1,\cdots,n_1$。分两种情况讨论:

1) 若 $\frac{d}{b_{n_1+1}}+\frac{d}{b_{n_1+2}}+\cdots+\frac{d}{b_{n_2}}>M-\sum\limits_{i=1}^{n_1}y_i$, 则

$$S_d=\{y^*\ \ y_i^*=\frac{d}{b_i},i=1,\cdots,n_1;y_j=0,j>n_2;y_k^*\le\frac{d}{b_k},k=n_1+1,\cdots,n_2,\sum_{i=1}^{n_2}y_i^*=M\}。$$

当 $n_2=n_1+1$ 时, S_d 仅有一个元素。当 $n_2\ge n_1+2$ 时, S_d 有无数个元素。

2) 若 $\frac{d}{b_{n_1+1}}+\frac{d}{b_{n_1+2}}+\cdots+\frac{d}{b_{n_2}}\le M-\sum\limits_{i=1}^{n_1}y_i$, 转(3) 讨论。

……

(m) 若 $\frac{d}{b_1}+\frac{d}{b_2}+\cdots+\frac{d}{b_{n_{m-1}}}=M$, 令 $y_i^*=\frac{d}{b_i}$, $i\le n_{m-1}$; $y_j^*=0$, $j>n_{m-1}$, $S_d=\{y^*\}$。

若 $\frac{d}{b_1}+\frac{d}{b_2}+\cdots+\frac{d}{b_{n_{m-1}}}<M$, 则令 $y_i=\frac{d}{b_i}$, $i=1,\cdots,n_{m-1}$。分两种情况讨论:

1) 若 $\frac{d}{b_{n_{m-1}+1}}+\cdots+\frac{d}{b_{n_m}}>M-\sum\limits_{i=1}^{n_{m-1}}y_i$, 则

$$S_d=\{y^*\ \ y_i^*=\frac{d}{b_i},i=1,\cdots,n_{m-1};y_j^*=0,j>n_m;$$

$$y_k^*\le\frac{d}{b_k},k=n_{m-1}+1,\cdots,n_m,\sum_{i=1}^{n_m}y_i^*=M\}。$$

当 $n_m=n_{m-1}+1$ 时, S_d 仅有一个元素。当 $n_m\ge n_{m-1}+2$ 时, S_d 有无数个元素。

2) 若 $\frac{d}{b_{n_{m-1}}}+\cdots+\frac{d}{b_{n_m}}\le M-\sum_{i=1}^{n_{m-1}}y_i^*$，转$(m+1)$讨论。

……

证明 1) 反证法。设 $y\in S_d$，$\exists\ i,1\le i\le n_1,y_i=\frac{d}{b_i}$。易知 $1,2,\cdots,n$ 中任一分量 y_i 均不满足上述等式，一定不是非劣解。因 $\frac{d}{b_1}+\frac{d}{b_2}+\cdots+\frac{d}{b_{n_1}}>M$，$\exists\ j,1\le j\le n_1,y_j<\frac{d}{b_j}$，无妨设 $y_i=\frac{d}{b_i}$，$1\le i\le k<n_1,y_j<\frac{d}{b_j},j>k$。令 $y_i^*=y_i-\epsilon,1\le i\le k;y_{k+1}^*=y_{k+1}+k\epsilon;j>k+1$ 时，$y_j^*=y_j$，其中 ϵ 是充分小的正数，使 $y^*\in\Lambda,y_{k+1}+k\epsilon<\frac{d}{b_{k+1}}$，则 $\theta(y)>\theta(y^*),\rho(y)=\rho(y^*)$，从而 y 不是非劣解。

2) 对于由(2)…(m)…所构造的 y^* 及 $\forall\ y\in\Lambda$，由于 $a_1=a_2=\cdots=a_{n_1}>a_{n_1+1}=\cdots=a_{n_2}>a_{n_2+1}=\cdots=a_{n_3}>a_{n_3+1}=\cdots=a_n$，$\sum y_i^*=\sum y_i=M$，必有：当 $\theta(y)=d$ 时，$\rho(y)\le\rho(y^*)$；当 $\theta(y)<d$ 时，$\rho(y)<\rho(y^*)$。

由定理 2 知，y^* 是非劣解。反之，y^0 若是非劣解，必有 $\rho(y^0)\le\rho(y^*)$，$\theta(y^0)=d$，则 y^0 必按(2)、(3)、…方式构造。

由定理 4，我们得结论 3。

结论 3 Λ 的非劣解集 $=\bigcup_{d\in[\alpha,\beta]}S_d$。

由定理 4 可见，非劣解集满足 $x_1q_1=x_2q_2=\cdots=x_kq_k$。

2 例

例 对 $n=1$、2、3 的情形，考虑非劣解的几何意义。

解 $n=1$ 时，非劣解集由线段 $[O,M/(1+p_1)]$ 组成。

$n=2$ 时，若 $a_1=a_2$，$S_d=\not\subset$，$d>\alpha$，故非劣解集由闭线段 OA 组成(图 1)；若 $a_1>a_2$，则对每一 d，S_d 是独点集，令 B 坐标为 $(M,0)$ 非劣解集由折线 OAB 组成(图 1)。

$n=3$ 时，若 $a_1=a_2=a_3$，则 $S_d=\not\subset$，$d>\alpha$，从而非劣解集由闭线段 OA 组成；若 $a_1=a_2>a_3$，对每一 d，S_d 是独点集，这时 $y_1b_1=y_2b_2$，$y_1+y_2+y_3=M$，取点 B，坐标为 $y_1=M/[b_1(b_1^{-1}+b_2^{-1})]$，$y_2=M/[b_2(b_1^{-1}+b_2^{-1})]$，$y_3=0$，则闭折线 OAB 即是非劣解集(图 2)。

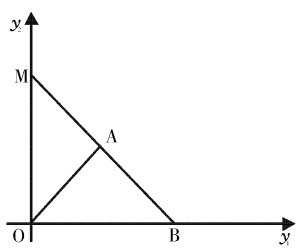

图 1 $n=2$ 时的非劣解

Fig.1 The non-inferior solution while $n=2$

若 $a_1>a_2=a_3$，则 $\forall\ d\in(\alpha,\beta)$，$S_d=\{y\ \ y_1=\frac{d}{b_1},0\le y_2\le\frac{d}{b_2},0\le y_3\le\frac{d}{b_3},y_1+y_2+y_3=M\}$。所以，令点 C 坐标为 $y_1=M/[b_1(b_1^{-1}+b_3^{-1})]$，$y_2=0$，$y_3=M/[b_3(b_1^{-1}+b_3^{-1})]$，点 D 坐标为 $(M,0,0)$，则非劣解集为闭线段 OA 与闭四边形 $ABCD$ 及其内部的并集(图 3)。

若 $a_1>a_2>a_3$，对每一 d，

$$S_d=\{y_1=\frac{d}{b_1},y_2=\frac{d}{b_2},y_3=M-y_1-y_2\},\frac{d}{b_1}+\frac{d}{b_2}<M;$$

$$S_d=\{y_1=\frac{d}{b_1},y_2=M-y_1,y_3=0\},\frac{d}{b_1}+\frac{d}{b_2}\ge M。$$

所以非劣解集为闭折线 $OABD$(图 2)。

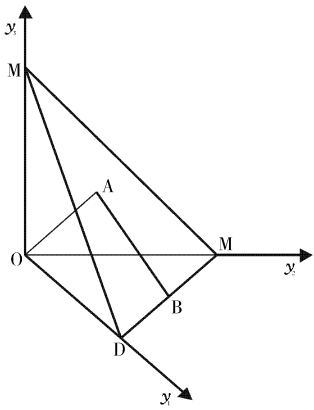

图 2　$n=3$ 且 $a_1=a_2>a_3$ 或 $a_1>a_2>a_3$ 时的非劣解

Fig. 2　The non-inferior solution while $n=3$ and $a_1=a_2>a_3$ or $a_1>a_2>a_3$

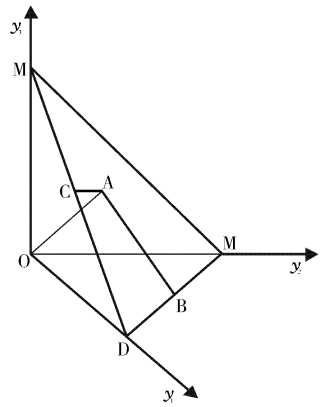

图 3　$n=3$ 且 $a_1>a_2=a_3$ 时的非劣解

Fig. 3　The non-inferior solution while $n=3$ and $a_1>a_2=a_3$

致谢: 本工作得到吴诚鸥教授的精心指导, 在此深表感谢。

参考文献:

[1]　CMCM-1998A. 数学的实践与认识[J], 1999, 29(1): 2

[2]　运筹学编写组编. 运筹学[M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 1990. 444～461

[3]　中国人民大学数学教研室编. 运筹学通论[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1987. 311～313

[4]　夏道行, 严绍宗, 吴卓人, 等编. 实变函数与泛函分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 1985. 65～67

THE NON-INFERIOR SOLUTION TO CMCM-1998A

ZHANG Jian-wei[1], ZHU Yu-hua[1], CAI Yan[2]

(1. Department of Mathematics; 2. Department of Atmospheric Sciences, NIM, Nanjing　210044)

Abstract: A non-inferior solution is presented to the CMCM-1998A with its explanation in n-dimentional real space. For cases that n equals to 1, 2, 3, the geometrical explanation is given.

Keywords: multi-object planning; non-inferior solution; hyperplane