

区域模式的嵌套边界条件研究[‡]

沈桐立¹⁾ 丁汇²⁾ 李 骥²⁾ 赵远东¹⁾

(1) 南京气象学院气象学系, 南京 210044, 2) 国家气候中心, 北京 100081)

摘 要 在对现今常用的几种嵌套边界条件进行对比研究的基础上, 提出一种普遍边界条件, 它可以在不同的假定下转变成各种常用的嵌套侧边界条件。由此可清晰地分析对比各种常用嵌套边界条件使用时的优缺点以及应注意的问题。

关键词 区域模式, 嵌套, 普遍边界条件

分类号 P456

在数值天气预报及模拟中, 为提高预报的效果, 常在有限区域内缩小网格距, 构成嵌套网格¹⁾方案。Phillips 等²⁾将这种嵌套网格资料的衔接按作用方式分为单向作用和双向作用。单向作用只考虑粗网格区域通过边界对嵌套网格的影响且操作方便, 故实际工作中大多采用这种方案。嵌套模式的效果, 关键在于处理好不同分辨率网格之间的衔接, 气象工作者对它进行了大量的研究, 提出了许多边界处理方法。例如海绵边界条件、辐射边界条件³⁾、Davies 松弛边界条件⁴⁾、Perkey 倾向松弛边界条件等⁵⁾。如此众多的处理方案, 给实际工作中择优选用带来了困难。一些气象学家曾对上述方案进行了比较, 但因个例不同、模式不同, 得出了一些相互矛盾的结论。本文提出的普遍嵌套边界条件, 可在不同假设条件下化为上述各种常用方案。分析其假设条件就可达到对比各种常用方案的目的。有利于进行有限区域的天气预报与模拟工作。

1 普遍嵌套边界条件的设计

在深入研究各种常用嵌套边界的基础上, 提出一种普遍嵌套边界条件, 其形式为

$$\Phi^{*n+1} = (1 - \alpha)\Phi^{n+1} + \alpha\tilde{\Phi}^{n+1} \tag{1}$$

式中, Φ^* 表示在边界松弛区内协调后的预报量; Φ 为嵌套模式计算出的预报量(未协调); $\tilde{\Phi}$ 为边界松弛区内由粗网格提供的预报量或者由其他方式给定的值。上角标 n 及 $n+1$ 表示时间层; 下角标 i 为自边界($i=1$)沿法向向内的格点序号; α 为协调系数, 在 $1\sim 0$ 之间变化。

2 普遍嵌套边界条件的应用

2.1 应用方案 1

若(1)式中 Φ^{n+1} 由粗网格或其他大区域模式提供随时间变化的值, 则此时(1)式的形式不变仍为

$$\Phi^{*n+1} = (1 - \alpha)\Phi^{n+1} + \alpha\tilde{\Phi}^{n+1} \tag{2}$$

[‡] 国家“九·五”科技攻关气候项目及自然科学基金资助项目

收稿日期: 1995- 12- 25; 改回日期: 1996- 07- 01

这是嵌套时常使用的一种修改的海绵边界。它与一般海绵边界不同,一般海绵边界用于粗网格的外边界,此时 Φ^{n+1} 因无预报模式提供,取为常值 Φ 。

2.2 应用方案 2

若(1)式中 Φ^{n+1} 取为细网格的预报值, Φ^{n+1} 由粗网格预报值提供, α 取为

$$\alpha = \frac{2k_i \Delta t}{1 + 2k_i \Delta t}$$

式中 k_i 为松弛系数。此时(1)式可变为

$$\Phi^{*n+1} = \frac{1}{1 + 2k_i \Delta t} \Phi^{n+1} + \frac{2k_i \Delta t}{1 + 2k_i \Delta t} \tilde{\Phi}^{n+1} \tag{3}$$

若设嵌套网格模式的预报方程的形式为

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^n = L(\Phi^n) \tag{4}$$

式中 $L(\Phi^n)$ 为预报方程的平流项及源汇项等。上式写为差分形式,则为

$$\Phi^{n+1} = \Phi^{n-1} + 2\Delta t L(\Phi^n) \tag{5}$$

将(5)式代入(3)式,则得

$$\Phi^{*n+1} = \frac{\Phi^{n-1} + 2\Delta t L(\Phi^n)}{1 + 2k_i \Delta t} + \frac{2k_i \Delta t \tilde{\Phi}^{n+1}}{1 + 2k_i \Delta t}$$

最后可化为

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^{*n} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^n - k_i(\Phi^* - \Phi)^{n+1} \tag{6}$$

与(4)式对比可知,它是经过修正的预报方程。 Φ^{*n+1} 是用修改后的方程(6)预报出的值。(6)式若省写上角标*号,即为下式

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_i^n = L(\Phi^n) - k_i(\Phi - \tilde{\Phi})^{n+1} \tag{7}$$

(7)式即为在边界过渡区中,把预报方程的右端加上一个松弛项 $k_i(\Phi - \tilde{\Phi})^{n+1}$ 的修改方程,即为著名的 Davies 嵌套边界方案。

2.3 应用方案 3

若(1)式中 α 在边界松弛区均取为 1,当边界气流为流出情形时,由平流方程算出的值作为 $\tilde{\Phi}^{n+1}$;而当边界气流为流入情形时, $\tilde{\Phi}^{n+1}$ 采用粗网格的预报值,(1)式变为

$$\Phi^{*n+1} = \tilde{\Phi}^{n+1}$$

这是常用的辐射嵌套边界条件。为进一步了解它,设气流为流出的情形,嵌套模式中气流在边界处满足下列平流方程

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -C \cdot \Phi = -C_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} - C_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{8}$$

进一步假定 C_x 与 $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ 的比例同 C_y 与 $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ 的比例相等。即

$$\frac{C_x}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}} = \frac{C_y}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}$$

代入(8)式可得

$$C_x = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2} \tag{9}$$

$$C_y = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y}}{(\frac{\partial \Phi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \Phi}{\partial y})^2} = C_x \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}} \quad (10)$$

可以利用上述公式求得流出边界处要素场的时变值 Φ^{n+1} 。例如, 当 $C_x < 0$, 对于左边界, (8) 式可写成

$$\frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} = - C_x \frac{\Phi_{i,j}^n - \Phi_{i,j}^n}{\Delta x} - C_y \frac{\Phi_{i,j+1}^n - \Phi_{i,j-1}^n}{2\Delta y}$$

即

$$\Phi_{i,j}^{n+1} = \Phi_{i,j}^{n-1} - \frac{2C_x \Delta t}{\Delta x} (\Phi_{i,j}^n - \Phi_{i,j}^n) - \frac{C_y \Delta t}{\Delta y} (\Phi_{i,j+1}^n - \Phi_{i,j-1}^n)$$

设 $\Phi_{i,j}^n = \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} + \Phi_{i,j}^{n-1}}{2}$, 则得

$$\Phi_{i,j}^{n+1} = \Phi_{i,j}^{n-1} - \frac{2C_x \Delta t}{\Delta x} (\Phi_{i,j}^n - \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} + \Phi_{i,j}^{n-1}}{2}) - \frac{C_y \Delta t}{\Delta y} (\Phi_{i,j+1}^n - \Phi_{i,j-1}^n)$$

整理得

$$\Phi_{i,j}^{n+1} = \frac{1 + C_x \Delta t / \Delta x}{1 - C_x \Delta t / \Delta x} \Phi_{i,j}^{n-1} - \frac{2C_x \Delta t / \Delta x}{1 - C_x \Delta t / \Delta x} \Phi_{i,j}^n - \frac{C_y \Delta t}{\Delta y (1 - C_x \Delta t / \Delta x)} (\Phi_{i,j+1}^n - \Phi_{i,j-1}^n) \quad (11)$$

当 $C_x > 0$, 对于右边界(m, j)处, 同理可推得

$$\Phi_{m,j}^{n+1} = \frac{1 - C_x \Delta t / \Delta x}{1 + C_x \Delta t / \Delta x} \Phi_{m,j}^{n-1} + \frac{2C_x \Delta t / \Delta x}{1 + C_x \Delta t / \Delta x} \Phi_{m,j}^n - \frac{C_y \Delta t}{\Delta y (1 + C_x \Delta t / \Delta x)} (\Phi_{m,j+1}^n - \Phi_{m,j-1}^n) \quad (12)$$

对于 $C_y < 0$ 的北边界或 $C_y > 0$ 的南边界处有与上述类似的公式。在实际工作中, 对要计算的边界点, 可用(9)或(10)式估算出 C_x 或 C_y , 若为流出情形, 再用(11)和(12)式中相应的方程计算出边界点的 Φ^{n+1} 值。

2.4 应用方案 4

若普遍边界条件(1)式中的 Φ^{n+1} 取为 $\Phi^{n+1} + \epsilon$, 其中 ϵ 设为 $(\Phi^{n-1} - \Phi^{n-1})$, 则(1)式变为

$$\Phi^{*n+1} = (1 - \alpha) \Phi^{n+1} + \alpha(\Phi^{n+1} + \epsilon) \quad (13)$$

整理后得

$$\frac{\Phi^{*n+1} - \Phi^{n-1}}{2\Delta t} = \alpha \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^{n-1}}{2\Delta t} + (1 - \alpha) \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^{n-1}}{2\Delta t}$$

或

$$(\frac{\partial \Phi}{\partial t})_{i,j}^{*n} = \alpha (\frac{\partial \Phi}{\partial t})_{i,j}^n + (1 - \alpha) (\frac{\partial \Phi}{\partial t})_{i,j}^n$$

上式即为 Perkey 的倾向松弛方案。等式右边第一项为大模式提供的要素变化倾向; 第二项为嵌套模式预报的要素变化倾向。

至此, 由普遍嵌套边界条件给出了 4 种具体的应用方案, 这些方案是嵌套模式常用的方案。若边界处 Φ^{n+1} 是由周期变化的函数决定, 或者是由对称或反对称条件决定, 那么还可以得到一些新的嵌套协调边界应用方案。由此可知, 普遍嵌套边界条件的确包含了各种常用嵌套协调边界处理的共性, 它具有普遍性。

3 普遍嵌套边界条件的误差分析

由(7)式知,在协调边界区域内,模式的预报方程可变为

$$(\frac{\partial u}{\partial t})^n_i = L(\tilde{w}^n) - k^i(u^i - \tilde{w})^{n+1}$$

式中u 为预报量。上式简化成平流方程,则为

$$u_t + Cu_x = - k(u - \tilde{u}) \tag{14}$$

式中下角标 i 及上角标 n 均省略了, $\tilde{u}$ 是粗网格模式提供的预报值。在边界协调区域内粗网格与细网格处预报量的差称为误差,它能引起细网格内区的预报误差,设误差为

$$u' = u - \tilde{u}$$

若嵌套的细网格模式内区也是由粗网格做出的预报,则应以 $\tilde{u}$ 代入(14)式,得

$$\tilde{u}_t + C\tilde{u}_x = 0 \tag{15}$$

把(14)式与(15)式相减,则得误差的预报方程

$$u'_t + Cu'_x = - ku'$$

为了较方便地讨论误差的传播,将上式改用中央差分方案

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \beta(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - k2\Delta t u_j^{n+1} \tag{16}$$

式中省写了误差u'上的撇号,其中 $\beta = \frac{C\Delta t}{\Delta x}$ 。现假设误差波沿 x 方向传播,且边界附近格点 j 的分布如图 1 所示。为集中讨论右边界处的问题,假定嵌套模式左边界位于无穷远处(但可传进误差)。现分析误差在右边界附近的情况,可把边界附近分成 3 个区域

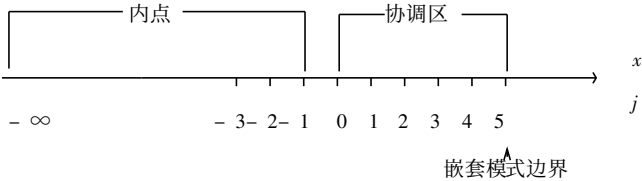


图 1 边界附近格点的分布

Fig. 1 Grid points adjacent to the boundary

区域 L₁: j ≤ - 1, 是嵌套模式的内点区;

区域 L₂: j > 0, 是嵌套模式边界的协调区;

区域 L₃: - 1 < j ≤ 0, 是嵌套模式内点与协调区交接处。

设误差是从左方(即从 - ∞ 处)传播达到协调区,则有

在 L₁ 区

↑

误差波

在 L₂ 区

↑

协调区误差衰减的波

$$\left. \begin{aligned} u_j &= e^{-i(n_1 x - \omega t)} + \Gamma(-1)^j e^{i(n_1 x + \omega t)} \\ u_j &= T e^{-\mu x} e^{-i(n_2 x - \omega t)} \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

(17) 式中, n₁ 与 n₂ 为波数; ω 为圆频率; T 为反射率; T e^{-μx} 是误差在协调区受到衰减的振幅,

其中 $x = j\Delta x$, 整个右端代表协调区误差衰减的波, 所以误差波在接近边界处是逐渐衰减的。

在 L_3 区应有

$$e^{-i(n_1x-\omega)} + \Gamma e^{i(n_1x+\omega)} = Te^{-\mu x} e^{-i(n_2x-\omega)} \tag{18}$$

在 $j = 0$ 处可得

$$1 + \Gamma = T \tag{19}$$

在 $j = -1$ 处, (18) 式亦应当成立。令 $\theta = n_1\Delta x$, $\Theta = n_2\Delta x$, (18) 式在 $j = -1$ 处可写为

$$e^{i\theta} - \Gamma e^{-i\theta} = T\mathcal{Y}e^{i\Theta} \tag{20}$$

式中 $\mathcal{Y} = e^{\mu\Delta x}$ 。求解(19)式与(20)式联立方程组, 得

$$\Gamma = \frac{-\mathcal{Y}e^{i\Theta} + e^{i\theta}}{\mathcal{Y}e^{i\Theta} + e^{i\theta}} \tag{21}$$

为求 Γ 可将(17)式代入(16)式, 得

$$Te^{-i(-\omega\Delta t)} = Te^{-i\omega\Delta t} - \beta(Te^{-\mu\Delta x}e^{-in_2\Delta x} - Te^{\mu\Delta x}e^{in_2\Delta x}) - Tk2\Delta te^{-i(-\omega\Delta t)} \tag{22}$$

令 $\varphi = e^{\mu\Delta x}e^{in_2\Delta x}$, 即 $\varphi = \mathcal{Y}e^{i\Theta}$, 则可将(22)式化为

$$e^{i\omega\Delta t} + 2\Delta tke^{i\omega\Delta t} - e^{-i\omega\Delta t} + \beta\left(\frac{1}{\varphi} - \varphi\right) = 0$$

展开整理得

$$\varphi^2 + 2(a + ib)\varphi - 1 = 0 \tag{23}$$

其中

$$a = k^* \cos(\omega\Delta t) \tag{24}$$

$$b = \left(k^* + \frac{1}{\beta}\right) \sin(\omega\Delta t) \tag{25}$$

$$k^* = \frac{k\Delta t}{\beta} = \frac{k\Delta x}{C}$$

解(23)式得

$$\varphi = -(a + ib) \pm \sqrt{a^2 - b^2 + 2abi + 1}$$

上式根号取正值代入(21)式得

$$\Gamma = \frac{(a + ib) - \sqrt{a^2 - b^2 + 2abi + 1} + e^{i\theta}}{(a + ib) + \sqrt{a^2 - b^2 + 2abi + 1} + e^{i\theta}}$$

由(24)及(25)式知, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 、 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $a \rightarrow k^*$ 、 $b \rightarrow 0$ 、 $e^{i\theta} \rightarrow 1$ 。所以

$$\Gamma = \frac{k^* - \sqrt{k^{*2} + 1} + 1}{-k^* + \sqrt{k^{*2} + 1} + 1}$$

很显然, 当 $k^* \rightarrow 0$ 时, $\Gamma \rightarrow 0$; 当 $k^* \rightarrow \infty$ 时, $\Gamma \rightarrow 1$ 。

因此在 *Davies* 边界条件下, 若在边界衔接处不产生反射波(即 $\Gamma \rightarrow 0$), 此时松弛系数 k 应为 0, 也即 α 为 0; 而在最外的边界处, 我们需要大网格提供的边界值能够进入嵌套模式内, 则应要求 Γ 趋于 1, 此时 k 值应当为 ∞ , 即 α 为 1。在实际工作中 α 的取值是遵循上述规律的。至于 α 的值在边界过渡区内如何变化较为合理, 数值试验表明, α 应远离边界迅速减小, 效果较好, 它优于均匀变化的结果⁶⁾。

4 各种应用方案使用效果的分析对比

以往一些气象工作者在嵌套模式选用具体方案时, 都曾试图比较各种方案的优劣。但因

模式不同、资料不同、边界处具体处理不同,所得结论也很不相同。而且各种边界协调处理方案之间内在联系也看不清楚,无法深入比较。而现在通过所建立的普遍嵌套边界条件,就有可能对各种形式迥然不同的边界处理方案进行比较。

4.1 海绵嵌套边界与 Davies 边界条件的比较

若将(2)式的海绵嵌套边界条件与(7)式的 Davies 边界条件对比,可知它们在本质上是相同的,这一结论只要从(7)式反推出(3)式就可明显地看出来。因此当 α 的取值相同时,它们的效果应当是相当的。数值试验的结果也证明了这一点^[6](图略)。

需要强调指出的是,由于 α 随 i 变化的取值对嵌套效果有明显的影响。过去有些研究工作是在 α 取值不同的情况下,比较上述两个边界条件的优劣,这样是不妥当的。

另外,由于原始的海绵边界条件仅是为改善有限区域固定边界条件的预报效果,它们在边界处采用的是固定不变的值,这与海绵嵌套边界用法是不同的,在使用时需要注意。

4.2 辐射边界条件与 Davies 边界条件的比较

由辐射边界条件方案知,当边界处为流出情形时,用(11)和(12)式计算;而若为流入情形时,边界取值与 Davies 方案相同。(11)和(12)式是用平流方程在一定的假设条件下导得的。与 Davies 方案比较可知, Davies 方案的边界值是取自于大网格模式。一般来说,大模式考虑的预报因子较平流方程全面,因此提供的值应当更准确些。这样可以推知 Davies 方案一般应当比这种辐射边界条件方案好。而且在实际情形中,边界处可能流出与流入交替分布,辐射边界条件中则是平流外推结果与大模式提供的结果交替分布。可以想象这样的效果不会是十分理想的。数值试验的结果也证明了这些结论,见文献[6,7]。

但需要指出,有些气象工作者常采用理想场来试验嵌套边界的性能,这时平流方程也许能准确地推断出边界值的变化,在这种情形下,辐射边界条件就显得优越。一些数值试验的分析结论正是在类似这种情形下得出的。但这样得到的结论并不可靠,因为实际要素场变化远较理想场变化复杂。一般来说,还是大网格模式提供的值更可靠,但这并不排除在使用理想场进行某些理论分析时,辐射边界条件有它的优越性。

4.3 倾向松弛条件与 Davies 边界条件的比较

对比倾向松弛方案(13)式与 Davies 边界方案(3)式,把两种方案中的协调系数 α 取成一致。可以看到,这两种方案的差异仅仅在 ϵ 上。 ϵ 采用的是 $(\Phi^{n-1} - \tilde{\Phi}^{n-1})$,即 $n-1$ 时刻大模式与嵌套模式在 i 点处的差值。若是采用自模式嵌套,在起步时,这两个值应当相等, $\epsilon = 0$; 在预报过程中,由于不断的协调,上述两值很接近,即 $\epsilon \rightarrow 0$ 。因此这两种方案的预报结果应当相近。对于异模式嵌套, $(\Phi^{n-1} - \tilde{\Phi}^{n-1})$ 的差值是存在的,两种方案的效果应当有差异。但因嵌套方案中 α 的取值是随 i 远离边界而迅速减小,这也使 ϵ 的作用相应迅速减小。由此可知,这两种方案的效果应当是差不多的。一些气象工作者所做的数值试验结果也证明了这一点^[7]。

通过上述对比分析,可以很方便地选用普遍嵌套边界条件的有关参数,达到最好的嵌套效果。一般来说,要达到较好的嵌套效果,要求大网格模式提供协调边界区域的值要准确;协调系数应取成远离边界迅速递减的形式;协调过渡区域不宜取得过窄,一般需要 5 圈以上。

5 小 结

根据对数值天气预报及模拟中常用的嵌套处理方案的研究,提出了一个普遍形式的边界条件。具体应用时,可根据实际情况选用有关系数,达到最佳嵌套效果。现归纳如下几点:

(1) 海绵边界条件在特定的状况下与 Davies 边界条件是等价的,它们有相同的效果,在各

种嵌套方案中效果也较好。另外, 海绵边界条件常用于大网格模式的外边界, 改善大网格模式的效果。

(2) 倾向松弛边界条件在自模式嵌套中与 *Davies* 边界条件也是等价的; 在异模式嵌套中, α 如果取值离边界迅速减小, 其嵌套效果也应与 *Davies* 方案相当。

(3) 辐射边界条件在实际业务预报条件下, 效果不如 *Davies* 边界条件, 也不如倾向松弛条件及改进的海绵边界条件。但在一些特定的理想场的数值试验中, 可能有甚佳的效果。它也常用于大网格模式的外边界处理。

(4) 在嵌套模式的边界协调中, α 的取值相当重要, 它直接影响嵌套的质量。一个好的嵌套方案 α 的取值, 应当是随远离边界处迅速减小。

(5) 要取得较好的嵌套预报或模拟的效果, 要求有高质量大网格模式的预报值。因此, 提高嵌套效果, 还应改进大模式的预报。

参 考 文 献

- 1 廖洞贤, 王两铭. 数值天气预报原理及其应用. 北京: 气象出版社, 1986
- 2 Phillips N A, Shukla J. On the strategy of combining coarse and fine grid mesh in numerical weather prediction. *JAM*, 1973, 12(5): 763~770
- 3 田永祥, 沈桐立, 葛孝贞, 等. 数值天气预报教程. 北京: 气象出版社, 1995
- 4 Davies H C. A lateral boundary formulation for multilevel prediction models. *Quart J R Met Soc*, 1976, 102(432): 405~418
- 5 Perkey D J, Kreitzberg C W. A time-dependent lateral boundary scheme for limited area primitive equation model. *Mon Wea Rev*, 1976, 104(6): 744~755
- 6 沈桐立, 闵锦忠, 温市耕. 套网格预报中几种边界条件的试验. 南京气象学院学报, 1995, 18(2): 248~254
- 7 沈建国, 沈桐立, 陆维松, 等. 五层原始方程单向嵌套模式侧边界条件的数值试验. 南京气象学院学报, 1990, 13(3): 298~306

STUDY ON NESTED BOUNDARY CONDITIONS OF A REGIONAL MODEL

Shen Tongli Zhao Yuandong

(Department of Meteorology, NIM, Nanjing 210044)

Ding Yihui Li Ji

(National Climate Center of China, Beijing 100081)

Abstract On the basis of comparative study on several classes of nested boundary conditions in current use, developed is a universal boundary condition which can be changed into usual ones, depending on assumptions, whereby it is convenient to compare their merits and demerits with the constraints presented when using these resulting conditions.

Keywords regional model, nested, universal boundary condition