第 19 卷第 3 期　　南京气象学院学报　　Vol. 19 No. 3
1996 年 9 月　　Journal of Nanjing Institute of Meteorology　　Sep. 1996

强迫耗散非线性临界层动力学的初步研究[†]

陆维松　　陶　丽

(南京气象学院气象学系, 南京　210044)

摘　要　研究了强迫耗散非线性临界层动力学, 得到了强迫耗散非线性临界层的解析解。解析解表明, 在含有强迫耗散的条件下, 非线性临界层仍有"Kelvin 猫眼", 当时间很大时, "猫眼"趋于定常。强迫耗散因子对非线性临界层激发的"Kelvin 猫眼"的涡度场有重要的调制作用。

关键词　非线性临界层, 强迫耗散

分类号　P433

临界层是切变基流的线性无粘稳定性分析中的一个共同特征。线性无粘理论所提供的波动解表明在波速与基流的局地流速相等处存在奇异性, 这是由于忽略了粘性、非线性和其他可能的效应, 如非绝热加热、非平行流等等。对于切变流的稳定性问题, 临界层的出现通常表示不稳定的爆发。Stewartson [1] 和 Warn 等 [2] 分别提出非线性对临界层有重要的意义, 在无粘条件下, 得到了非线性临界层的解析解(简称 SWW 解)。此解表明, 非线性临界层初始时刻吸收, 以后逐步变为理想反射, 接着又变为超反射, 以后围绕理想反射在吸收和超反射之间变化, 最后衰减为理想反射。Beland [3] 应用正压涡度方程模式, 对非线性临界层作了数值模拟, 与 SWW 解有些相似, 并出现了不稳定。Killworth 和 McIntyre [4], Haynes [5] 进一步从理论上研究了 SWW 解的吸收、反射和超反射及非线性临界层正压不稳定的影响。Brunet 和 Warn [6] 研究了急流上的 Rossby 波临界层, 指出临界层容易在稳定的急流上激发出来。Zimmermann [7] 应用渐近匹配法, 得到球面上浅水方程非线性临界层的解析解。上述研究均局限于绝热无摩擦的情况, 而对实际大气的 Rossby 波非线性临界层而言, 必须考虑非绝热加热和有摩擦的情况, 因为非线性临界层长时间演变过程不能再视为绝热无摩擦。

本文从强迫耗散的正压涡度方程出发, 试图导得解析解, 并确定强迫耗散非线性临界层动力学特征。

1　基本方程和无粘绝热解

用强迫耗散无辐散正压涡度方程作为强迫耗散非线性临界层模式, 即

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta) + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \gamma \nabla^4 (\psi - \psi_{00}) \tag{1}$$

式中, $\zeta = \nabla^2 \psi$; γ 为摩擦系数, $-\gamma \nabla^4 \psi_{00}$ 为涡源项, 表示非绝热加热。(1) 式为无量纲方程, 已引入了尺度 $\bar{u} \sim \Lambda y$, $(x, y) \sim \Lambda / \beta$, $(t, (\beta y)^{-1}) \sim \Lambda^{-1}$, $\psi \sim \Lambda^3 / \beta^2$。

† 中国气象局气象科学基金资助项目

收稿日期: 1995-10-05; 改回日期: 1996-02-20

令
$$\psi = -\frac{1}{2}y^2 + \epsilon\varphi, \quad \varphi_{00} = \epsilon\varphi_0 \tag{2}$$
(2)式代入(1)式,得
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + y\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \epsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\nabla^2\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\nabla^2\varphi}{\partial x}\right) = \gamma\nabla^4(\varphi - \varphi_0) \tag{3}$$
若 x 方向波长与长度尺度相比是很长的(即 $k \ll \beta/\Lambda$),则算子 $\nabla^2 \approx \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 可以引入慢变时间变量和空间变量
$$T = \mu t,\ X = \mu x,\ \mu = k\Lambda/\beta \ll 1 \tag{4}$$
(4)式代入(3)式,得
$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + y\frac{\partial}{\partial X}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial X} + \epsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X}\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^3\varphi}{\partial X^3}\right) = 0(\mu^2) \tag{5}$$
(5)式中已略去强迫耗散项。取初始条件和边界条件为
$$\begin{cases} \varphi = 0,\ y \le y_0,\ T = 0 & (6) \\ \varphi \to 0,\ y \to -\infty,\ T > 0 & (7) \\ \varphi = R_e(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}X}),\ y = y_0,\ T > 0 & (8) \end{cases}$$
对于线性情况,$\epsilon = 0$,(5)~(8)式的解析解的第一近似对长的时间($T \gg 1$)趋于定常解
$$\varphi = \begin{cases} \mathrm{Re}\{[A_0 f(y) + B_0 g(y)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}X}\}, & y > 0 \quad (9) \\ \mathrm{Re}\{A_0 h(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}X}\}, & y < 0 \quad (10) \end{cases}$$
式中,实函数 f, g, h 分别用 Bessel 函数定义为
$$\left.\begin{aligned} f(y) &= -\pi y^{1/2}Y_1(2y^{1/2}) = 1 - y\ln y - (2r-1)y + 0(y^2\ln y) \\ g(y) &= y^{1/2}J_1(2y^{1/2}) = y + 0(y^2) \\ h(y) &= 2y^{1/2}K_1(2y^{1/2}) = 1 + y\ln y + (2r-1)y + 0(y^2\ln y) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$
式中,Euler 常数 $r \approx 0.577\ 22$。实际上,(9)、(10)式也满足(5)式略去 $\frac{\partial}{\partial t}$、$\epsilon$ 和 μ 项所得的方程
$$y\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial X} = 0$$
(9)和(10)式中的常数,由下式确定
$$\begin{cases} B_0 = -\mathrm{i}\pi A_0 & (12) \\ A_0 f(y_0) + B_0 y(y_0) = 0 & (13) \end{cases}$$
(12)式由(9)、(10)两式的 φ 在临界线 $y = 0$ 处保持连续得到。而(13)式是利用了边界条件(8)式得到的。

当 $T \sim 0(\epsilon^{1/2})$ 时,时间变得相当大,(5)式中的非线性项变得有意义,必须考虑非线性效应,因此,可取新的慢变时间尺度为
$$\tau = \epsilon^{1/2}T = \epsilon^{1/2}\mu t \tag{14}$$
则(5)式化为
$$\frac{\partial}{\partial X}\left(y\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \varphi\right) = -\epsilon^{1/2}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) - \epsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X}\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^3\varphi}{\partial X\partial y^2}\right) \tag{15}$$
或
$$\frac{\partial}{\partial X}\left(y\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \varphi\right) = 0(\epsilon^{1/2}) \tag{16}$$
当 $\tau = 0(1)$ 和 $y \ne 0$ 时,由(16)式得

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= A(X,\tau)f(y) + B(X,\tau)g(y) \quad & y > 0\\ \varphi &= A(X,\tau)h(y) & y < 0\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

利用边界条件(8)式, 则由(17)式得

$$A(X,\tau)f(y_0) + B(X,\tau)g(y_0) = a\cos X \tag{18}$$

此时, (18)式取代了(13)式, a 是实数。特别, 当 $g(y_0)=0$ 而 $f(y_0)\neq 0$ 时, (18)式与时间 τ 无关, 不失一般性, 选择(18)式中的 a 使得

$$A(X,\tau) = A(X) = \cos X \tag{19}$$

由 $g(y_0) = 0$ 可得边界 y_0 的位置, $y_0 = (\frac{1}{2}j_{1,n})^2 \approx 3.671,\ 12.305, 25.875, \cdots$, $j_{1,n}$ 是 Bessel 函数 J_1 的第 n 个零点。将(19)式代入(17)式, 并利用(11)式, 再代入(2)式, 得

$$\psi = -\frac{1}{2}y^2 + \epsilon\cos X \tag{20}$$

(20)式不仅在线性阶段结束, 而且在整个非线性演变阶段 $\tau = 0(1)$, 甚至在临界层内, 即 $y = 0(\epsilon^{1/2})$ 内, 也给出了总流函数的第一近似。(20)式对应的流场是一定常的"Kelvin 猫眼"流型, 即 $y = \pm\sqrt{2}(\epsilon\cos X - \psi_0)^{1/2}$, $\psi = \psi_0 =$ 常数, 为流线值。因 $y \propto \epsilon^{1/2}$, 可见"猫眼"宽度即为 $y \propto \epsilon^{1/2}$, 所以, 可引入新的慢变量

$$Y = \epsilon^{-1/2}y \tag{21}$$

(21)式代入(2)式, 得

$$\psi = -\frac{1}{2}\epsilon Y^2 + \epsilon\varphi$$

并令

$$\varphi = A(X,\tau)[1 - \frac{1}{2}(\epsilon^{1/2}\ln\epsilon)Y - \epsilon^{1/2}(2r-1)Y] + \epsilon^{1/2}\Phi(X,\tau,Y) + 0(\epsilon\ln\epsilon) \tag{22}$$

式中, r 仍是 Euler 常数。利用(21)式, (15)式化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + Y\frac{\partial}{\partial X}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial Y^2} + \epsilon^{1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial X} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial X}\frac{\partial^3\varphi}{\partial Y^3} - \frac{\partial\varphi}{\partial Y}\frac{\partial^3\varphi}{\partial X\partial Y^2}\right) = 0 \tag{23}$$

将(22)式代入(23)式, 得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + Y\frac{\partial}{\partial X}\right)\zeta + \frac{\partial A}{\partial X} + \frac{\partial A}{\partial X}\frac{\partial\zeta}{\partial Y} = 0 \tag{24}$$

式中

$$\zeta = \frac{\partial^2\varphi}{\partial Y^2} \tag{25}$$

(19)式代入(24)式, 得

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + Y\frac{\partial}{\partial X}\right)\zeta - \sin X\frac{\partial\zeta}{\partial Y} - \sin X = 0 \tag{26}$$

由(26)式得 $Y^2 + 4\sin^2\frac{X}{2} = \eta^2$。式中, $\eta =$ 常数。$(\zeta + Y)$ 沿特征线, 即等 η 线守恒。若 $\eta < 2$, 这些特征线是闭合的; 若 $\eta > 2$, 则它仍是周期的; $\eta = 2$ 曲线构成了"Kelvin 猫眼"的边界线。由(26)式积分可得

(a) $\eta > 2$, $0 < X < 2\pi$

$$\sin(X/2) = sn(\theta, 2/\eta),\quad Y = \eta dn(\theta, 2/\eta)$$

$$\zeta = -Y + \eta(\mathrm{sgn}Y)dn(\theta - \frac{1}{2}\eta\tau\mathrm{sgn}Y, 2/\eta) \tag{27}$$

式中椭圆函数 Sn、dn 的模是 $2/\eta$。

(b) $\eta < 2,\ 0 < X < 2\pi$

$$\sin(X/2) = \frac{\eta}{2}sn(\xi, \eta/2),\quad Y = \eta cn(\xi, \eta/2)$$

$$\zeta = -Y + \eta(\mathrm{sgn}Y)cn(\xi - \tau\mathrm{sgn}Y, \eta/2) \tag{28}$$

式中椭圆函数 sn、cn 的模是 $\eta/2$。

由(27)、(28)两式可见, 当 $\tau\to\infty$时, ζ在临界层内不趋于一定常极限, 而在每个(X, Y)点作周期振荡。对于 $u\leq 2$, 可设想一个质点具有速度分量$(Y, \sin X)$, 围绕等值线 $u=$ 常数运动, 并保持$(\zeta - Y)$不变。轨道的周期是 u 的函数。因此, 对中等或大的 τ值, ζ成为 X、Y 的振荡函数。类似地, 对 $u>2$, 除了轨道不闭合且是周期之外, 讨论相似。

2 强迫耗散非线性临界层的解析解

(2)式代入(1)式, 得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + y\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \epsilon J(\varphi, \nabla^2\varphi) = r\nabla^4(\varphi - \varphi_0) \tag{29}$$

将(14)、(21)式和(4)式中的 X 定义式代入(29)式, 得

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + Y\frac{\partial}{\partial X}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial Y^2} + \epsilon^{1/2}\frac{\partial\Phi}{\partial X} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial X}\frac{\partial^3\Phi}{\partial Y^3} - \frac{\partial\Phi}{\partial Y}\frac{\partial^3\Phi}{\partial X\partial Y^2}\right) = \tilde{r}\frac{\partial^4}{\partial Y^4}(\Phi - \Phi_0) \tag{30}$$

式中$\tilde{r} = \epsilon^{1/2}r$。

(22)式代入(30)式, 得

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + Y\frac{\partial}{\partial X}\right)\zeta + \frac{\partial A}{\partial X} + \frac{\partial A}{\partial X}\frac{\partial\zeta}{\partial Y} = \tilde{r}\frac{\partial^2}{\partial Y^2}(\zeta - \zeta_0) \tag{31}$$

(19)式代入(31)式, 得

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + Y\frac{\partial}{\partial X}\right)\zeta - \sin X\frac{\partial\zeta}{\partial Y} - \sin X = \tilde{r}\frac{\partial^2}{\partial Y^2}(\zeta - \zeta_0) \tag{32}$$

由(32)式可见, $(\zeta + Y)$沿特征线——等η线不守恒, 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\zeta + Y) = \tilde{r}\frac{\partial^2}{\partial Y^2}(\zeta - \zeta_0) \tag{33}$$

由(32)式可重新得到特征线为

$$\eta = Y^2 - 4\cos^2\frac{X}{2} \tag{34}$$

当 $\tilde{r}\ll 1$ 时, (34)式的定常解取为

$$\zeta = -Y + K(\eta) + \tilde{r}\zeta_0 + \tilde{r}\zeta_1(X, \eta) + 0(\tilde{r}^2) \tag{35}$$

式中函数 $K(\eta)$ 待定。若 $c\leq 0$, 特征线即 $\eta = c$ 是闭合的; 当 $c>0$, 特征线即 $\eta = c$ 是周期的, 不闭合; 当 $c=0$, 特征线构成"Kelvin 猫眼"的边界线。$-\tilde{r}\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial Y^2}$是定常涡源项, 取 $\zeta_0 = \zeta_0(\eta)$, 则$\frac{\mathrm{d}\zeta_0}{\mathrm{d}t} = 0$。

(35)式代入(33)式, 得 ζ_1 的方程为

$$Y\frac{\partial\zeta_1}{\partial X} = 4\left(\eta + 4\cos^2\frac{X}{2}\right)K''(\eta) + 2K'(\eta) \tag{36}$$

当 ζ_1 在 X 方向的周期是 2π, 积分(36)式, 得

$$K(\eta) = B_+ - \pi\int^{\eta}\mathrm{d}u\left[\int_0^{2\pi}\left(u + 4\cos^2\frac{X}{2}\right)^{1/2}\mathrm{d}X\right]^{-1},\quad Y>0$$

$$K(\eta) = B_- + \pi\int^{\eta} \mathrm{d}u\left[\int^{2\pi}(u + 4\cos^2\frac{X}{2})^{1/2}\mathrm{d}X\right]^{-1}, \quad Y < 0$$

在"猫眼"内, $\eta < 0$, 必有特征线 $K(\eta) = c =$ 常数; 在"猫眼"边界上和其外部, 有 $B_+ = B_- = c$。这意味着 ζ 在 $\eta = 0$ 处连续。

因此, 由(34)、(35)两式可见, 强迫耗散非线性临界层仍产生"Kelvin 猫眼"。设想以速度分量$(Y, -\sin X)$围绕 $\eta =$ 常数的闭合曲线运动的质点, 其$(\zeta + Y)$随时间不再守恒, 它不仅与 $K(\eta)$ 有关, 而且与强迫耗散项 $\tilde{r}\zeta_\tau + r\zeta$ 有关。当时间很大时, "猫眼"趋于定常解。强迫耗散因子对非线性临界层激发的 Kelvin 猫眼的涡度场有重要的调制作用, 并通过对涡度场的调制, 由 $\zeta = \frac{\partial^2\Phi}{\partial Y^2}$ 和(22)式, 对流函数也有明显的调制作用, 使猫眼发生变形。对应的基流也产生了 $0(\epsilon^{1/2})$ 的变形。还可以确定 Reynolds 应力的"跳跃"为

$$[uv] = \overline{(uv)}_+ - \overline{(uv)}_- = \left[-\frac{\partial\varphi}{\partial X}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] \qquad (37)$$

将(22)、(19)两式代入(37)式, 并利用(25)式, 得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X} = \frac{\partial A}{\partial X} = -\sin X$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial Y} = \int_{-\infty}^{\infty *}\zeta\mathrm{d}Y = B(X, \tau) \qquad (38)$$

式中* 表示积分取柯西主值。(38)式代入(37)式得

$$[-\overline{uv}] = -\overline{B(X,\tau)\sin X} = -\frac{1}{2\pi}\int^{2\pi}B(X,\tau)\sin X\,\mathrm{d}X \qquad (39)$$

$-\overline{uv}$ 为 $E-p$ 通量的 y 方向分量, 表示波能量在 y 方向的传播方向。$[-\overline{uv}]$ 表示波能量在 y 方向的辐合辐散。当 $[-\overline{uv}] < 0$ 时, 临界层有能量辐合, 即临界层吸收波能量, 当 $[-\overline{uv}] > 0$ 时, 临界层有能量辐散, 即超反射波能量; 当 $[-\overline{uv}] = 0$ 时, 临界层无能量辐合辐散, 即理想反射波能量。因此, 由(38)、(39)两式, 根据涡度 ζ 的分布, 即可确定临界层吸收、反射和超反射。

3 结　语

本文从强迫耗散无辐散正压涡度方程出发, 研究了强迫耗散非线性临界层的动力学。并导得解析解。由解析解可见, 强迫耗散非线性临界层仍有 *Kelvin* 猫眼, 当时间很大时, 猫眼趋于定常。强迫耗散因子对非线性临界层激发的 *Kelvin* 猫眼的涡度场有重要的调制作用, 从而对流场的猫眼有明显的影响, 并使基流变形。这些结果对于用非线性临界层理论研究副热带高压的形成、维持和振荡有着重要的意义。

参　考　文　献

1 *Stewartson K. The evolution of a Rossby wave critical level. Geophys Astrophys Fluid Dyn*, 1978, 9: 185～200

2 *Warn T, Warn H. On the development of a Rossby wave critical level. J Atmos Sci*, 1976, 33: 2021～2024

3 *Beland M. Numerical study of the nonlinear Rossby wave critical level development in a barotropic flow. J Atmos Sci*, 1976, 33: 2066～2078

4 *Killworth P D, McIntyre M E. Do Rossby-wave critical layers absorb, reflect, or over-reflect? J Fluid Mech*, 1985, 161: 449～492

5 *Haynes P H. The effect of barotropic instability on the nonlinear evolution of a Rossby-wave critical layer. J Fluid Mech*, 1989, 207: 231～266

6 *Brunet G, Warn T. Rossby wave critical layers on a jet. J Atmos Sci*, 1990, 47: 1173～1178

7 Zimmermann G. Nonlinear critical layers in barotropic stability. J Atmos Sci, 1991, 48: 1642～1648

PRELIMINARY RESEARCH OF DYNAMICS FOR A FORCED DISSIPATIVE NONLINEAR CRITICAL LAYER

Lu Weisong Tao Li

(*Department of Meteorology, NIM, Nanjing* 210044)

Abstract The dynamics for a forced dissipative nonlinear critical layer is first dealt with, attaining an analytical solution of such a layer, which suggests that under the forced dissipation, a Kelvin cat's eye emerges in the layer and the eye tends to be in a steady state as time goes on and the dissipative factor has innegligible modifying effects on a vorticity field as the Kelvin cat's eye excited in the cirtical layer.

Keywords nonlinear critical layer, forced dissipation