第18卷第4期 南京气象学院学报 Vol. 18 No. 4
1995年12月 Journal of Nanjing Institute of Meteorology Dec. 1995

不变量方法*

刘桂馥
（南京气象学院基础科学系，南京 210044）

摘要 不变量方法是一种数字技术，该方法对给定长度有限的时间序列，可以构造出一个常微分方程组。该方程组的解在有限时段上的采样值与给定序列重合。观测研究是对无法确定其方程的动力系统进行的研究；不变量方法提出了动力数值试验的可能性。

关键词 动力系统，半流，一阶偏微分方程，守恒律，不变量，伴生函数

分类号 P437

1 背景和原理

1.1 推理科学和实验反问题

物理和力学是推理科学的范例。它们是由物质守恒定律建立数学模型，常见的模型就是微分方程。对物质对象的研究，转化为对定解问题的研究；这是一种近似，也是一种抽象。

概括以上步骤就是科学推理程式。这种体系开始于伽利略和牛顿。当代科学成就和主流方法都归结为这种体系的确立。

近代虽有数学反问题，数学模型仍然是问题的核心，数学物理的反问题是方程理论的一部分。既使数学模型不确知，但也不能对模型一无所知。

在大气科学中，确有许多重要的问题，如ENSO现象，其模型是无法确定的。目前，在这方面的研究，除直觉分析外就是统计方法；无论研究成果如何，这总是片面的。

基于这种考虑，我们提出了半数学的反问题。不妨称它为实验反问题。它们借助于观测实况估算守恒律。

1.2 动力系统

讨论未知的定解问题（函数 P 未知）

$$\dot{u} = P(u,t) \qquad (t > 0); \quad u(0) = u_0 \tag{1}$$

若给出上面问题的部分解，则

$$L:\{u(t);\ 0 \leqslant t < T\} \tag{2}$$

不变量方法是企图由 L 构造方程

$$\dot{y} = F(y,t); \quad y(0) = u_0 \tag{3}$$

使其解 $y(t)$ 有 $y(t) = u(t)$；$0 \leqslant t < T$。在时段 $0 \leqslant t < T$ 上，确有 $P(u(t),t) = F(u(t),t)$。但这并不表明下式成立

---

* 国家自然科学基金资助项目
收稿日期：1994-12-29；改回日期：1995-06-19

$$\begin{cases} P(v,t) = F(v,t);\ 0 \leqslant t < T,\ \forall\ v \\ P(u(t),t) = F(y(t),t);\ t \geqslant T \end{cases} \tag{4}$$

上面事实表明了不变量方法的局限性。

初值问题是具体的动力系统,然而动力系统远比初值问题含意广泛。本文所提到动力系统限指常微分方程组。对给定的初值,常微的解被称为动力系统的一个半流;半流与初值有关。所谓动力系统其实是含参数的映射族,如 $\varphi(t_0,t):u(t_0) \to u(t)$。

因此,既便给出可数个半流也不能唯一确定它们的映射族;也就是借半流不能唯一重建动力系统,这是就数学意义而言的。

在应用中允许对半流和系统作近似考虑。如果初值段(2)式充分长,即 T 足够大,由不变量方法构造的(3)式可以指望(4)式成为近似等式。因为描述实况的方程(1)常不复杂,指望在时段外有限范围内有 $P(u(t),t) = F(y(t),t) + \varepsilon(t);\ T < t < T_1$ 。

1.3　动力假设检验

熟知,高阶方程式或非自治常微组,均可等价地化成自治的一阶组。例如,如下两个方程(组)等价

$$\dot{u} = P(u,t) \text{ 与 } \begin{cases} \dot{u} = P(u,v) \\ \dot{v} = 1 \end{cases}$$

不失一般性,以下仅讨论自治一阶组

$$\begin{cases} \dot{u} = P(u,v,w) \\ \dot{v} = Q(u,v,w) \\ \dot{w} = R(u,v,w) \end{cases} \tag{5}$$

甚至还可以假设,在(5)式中,至少有一个解是已知的。例如已知 $w(t) \equiv t,\ t \geqslant 0$ 。

动力假设检验有两重含意,检验不变量方法的可靠性,考查函数间的相依关系。分别说明如下

(1)可靠性检验　对未知定解问题(1)式,给出初值段即 $u(t)$ 在 $0 \leqslant t < T$ 上的值。把初值段分成两部分 $I_1: 0 \leqslant t < T_1$; $I_2: T_1 \leqslant t < T$ 。借 I_1 上初值作出(3)式,求解(3)式并估算 $\varepsilon = |u(t) - y(t)|;\ t \in I_2$ 。若 ε 在 I_2 上取值过大,另行构造(3)式。

(2)函数的相依性检验　某物质系统 S 为坐标函数 u、v、w 所确定,坐标函数被未知的常微组(5)式所约束。对未知的常微组(5)式可作如下假设,例如

$$\begin{cases} \dot{u} = P(u,v) \\ \dot{v} = Q(u,v) \\ \dot{w} = R(u,v,w) \end{cases} \tag{6}$$

(6)式是(5)式的特殊形式,对(6)式的前两个方程可以独立使用不变量方法。特别地,由 u,v 的方程消去 v,u 将满足一个未知的二阶方程 $\ddot{u} = F(\dot{u},u)$ 。

因此称 u 是 S 的二阶分量。显然,分量阶数低表明该分量独立性强。作这种鉴定对大气科学中的观测研究极为重要。

称形式(6)为动力学假设。检验方法与前述可靠性检验相同;在 I_1 上按形式(6)用不变量法,预测结果与 I_2 上已给初值比较。

这种检验是实验性的,因为不变量方法本身也是实验性的。在说明不变量方法之前,有必要再次陈述如下看法。面对大量无法用传统数学处理的问题,自然会产生半数学的方法;不变量方法便是一个例子。

1.4 不变量方法的原理[1]

不变量方法是反向利用一阶偏微分方程的特征理论。本文旨在陈述形式方法，所以按函数形式说明，在实用中所谓函数实为数列或多维数组。

考虑如下未知方程（如前(5)式）

$$\begin{cases} \dot{u} = P(u,v,w) \\ \dot{v} = Q(u,v,w) \\ \dot{w} = R(u,v,w) \end{cases}$$

称为(5)式的不变量，或称为解函数 u、v、w 的不变量，指非常数函数 A，把(5)式的解代入有

$$A(u(t),\ v(t),\ w(t)) = \mathrm{const} \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial A}{\partial v}\dot{v} + \frac{\partial A}{\partial w}\dot{w} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial A}{\partial u}P + \frac{\partial A}{\partial v}Q + \frac{\partial A}{\partial w}R = 0 \tag{9}$$

熟知，(5)式为(9)式的特征(线)方程。方程(9)的解曲面 $A = \mathrm{const}$，由(5)式的解曲线 H 织成，即 $H\{u(t),\ v(t),\ w(t);\ t \geqslant 0\}$。如果另有不变量 B，特别要求满足条件

$$S(A,B) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A}{\partial u} & \dfrac{\partial A}{\partial v} \\ \dfrac{\partial B}{\partial u} & \dfrac{\partial B}{\partial v} \end{pmatrix};\quad \det S(A,B) \neq 0 \tag{10}$$

矩阵 S 或其行列式是在点 $(u_0,\ v_0,\ w_0)$ 邻域内取值。此时称 A,B 关于 u,v 在点 $(u_0,\ v_0,\ w_0)$ 邻域内函数独立，以下简称为“AB 函数独立”。

由 A、B 得到方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial u}P + \dfrac{\partial A}{\partial v}Q + \dfrac{\partial A}{\partial w}R = 0 \\ \dfrac{\partial B}{\partial u}P + \dfrac{\partial B}{\partial v}Q + \dfrac{\partial B}{\partial w}R = 0 \end{cases} \tag{11}$$

进而解出 P,Q

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = -\, S^{-1}(A,B)\,\frac{\partial}{\partial w}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} R \tag{12}$$

(12)式称为演化方程，S 或 S^{-1} 称为演化矩阵。不变量方法的应用，都关系到演化方程和演化矩阵。特别指明，在应用中，初值段是以观测序列给出的，该序列又称时间序列

$$\begin{cases} (u):\ u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n \\ (v):\ v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n \\ (w):\ w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_n \end{cases} \tag{13}$$

因此，计算不变量常由序列(13)入手。从数学上看，初值段(2)式与序列(13)有本质的不同；在应用意义上，它们又是一致的。

1.5 演化方程的不变性

这里不严格地罗列一些结论

(1)方程(5)有无数个不变量，它们都是方程(9)的解，显然，若 A,B 为不变量，那么 $F(A,B)$ 也是不变量，其中 F 为光滑二元函数。

(2)对三个未知函数的方程(5)，在任一点 $(u_0,\ v_0,\ w_0)$ 处任三个不变量 A,B,C 必然函数

相关。对不变量 A ,存在多个与它函数独立的不变量 B 。

因此,若 A,B 在某点邻域函数独立,那么该邻域内其他不变量 C 必有

$$C = F(A,B)$$

C 在点(u_0,v_0,w_0) 邻域内, A,B 和 C,D 为两对函数独立的不变量,则有

$$S^{-1}(A,B)\frac{\partial}{\partial w}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix} = S^{-1}(C,D)\frac{\partial}{\partial w}\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix} \tag{14}$$

上式在点 (u_0,v_0,w_0) 邻域内成立。这是演化方程的不变性;即演化方程(12)不因选用的不变量不同而不同。

如上结论,对光滑函数,方程(5)和(9)的全面解存在且光滑的条件下是成立的。还应指明,如上结论对方程(5)的理论不变量或者说是方程(9)的解成立。不变量方法所构造的不变量可能是未知模型(5)的理论不变量,也可能是不同意义下的近似不变量。在使用不变量方法时应该明确这种差异。演化方程将作如下变形

$$\begin{pmatrix}\dot u\\ \dot v\end{pmatrix} = -S^{-1}(A,B)\frac{\partial}{\partial w}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\dot w \tag{15}$$

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_{i+1} = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_i - S^{-1}(A,B)\frac{\partial}{\partial w}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\Delta w_i \tag{16}$$

(16)式是近似关系, $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$ 。此式表明,若已知 u,v,w 在 t_i 处取值,即 u_i, v_i, w_i 给出后,由(16)式估算出 u_{i+1},v_{i+1} 。这里假定 w_{i+1} 是确知的。

至此,不变量方法的意义明确了。这里,S^{-1} 将随 u, v, w 取值不同而不同;它相当于动力系统的演化半群元素。

注意到演化方程的不变性,在使用关系(16)时,不变量允许随时更换,选择不变量使其 S^{-1} (常义的)的病态性小,以提高估算效果。从几何角度来看十分清楚,就是使曲面 $A = \text{const}$ 和 $B = \text{const}$ 在该点近乎正交。

2 不变量的计算

本文所指的不变量,是“时不变”的量;如保守系统的总能量。

例,令 $u(t) = e^t, v(t) = t^2 + t + 1$ 。由 $t = \ln u\ (u > 0)$ 得到如下不变量

$$A(u,\ v,\ t) = t^2 + \ln u - v \equiv 1$$

$$B(u,\ v,\ t) = (\ln u)^2 + t - v \equiv 1$$

$$S(A,B) = \begin{bmatrix}\dfrac{1}{u} & -1\\[2ex] \dfrac{2}{u}\ln u & -1\end{bmatrix}$$

$$\det S(A,B) = \frac{1}{u}(\ln^2 u - 1) \neq 0 \quad (u \neq \sqrt{e})$$

在此,变量 t 可以理解为(5)式中的 w 。

2.1 序列不变量

应用中给出的初值段,只能是长度为 n 的序列(13)

$$\begin{cases} (u):\ u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n \\ (v):\ v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n \\ (w):\ w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_n \end{cases}$$

此时不变量由下式定义

$$A(u_i,\ v_i,\ w_i) = \text{const} \tag{17}$$

不变量的两种定义(7)与(17)式在数学上有本质差异;在此将不作计较。对有限区间上的函数

$$\{u(t),\ v(t),\ w(t);\ 0 \leqslant t < T\} \tag{18}$$

可以把 $[0,T)$ 分划成几个等间距点,取函数在分划上的采样值即得到序列(13)。

对初值序列(13),可以精确地求出按(17)式定义的不变量;并可以确保两不变量函数独立,方法见下文。

对以(2)或(18)式给出的初值段,可以按如上方法,即分划 $[0,T)$ 成序列(13),再用初值序列方法求不变量。当然对初值段而言已作了近似。

2.2 伴生函数和伴生序列

伴生函数是构造不变量的关键概念。伴生函数的选取十分任意,初看容易使人误解。这里再 一次强调演化方程的不变性,不变量的选取尽管自由,但不影响估算结果。

取非常数的光滑函数 $f(x,y,z)$,将初值函数代入其中,得

$$Q(t) = f(u(t),\ v(t),\ w(t)) \tag{19}$$

称函数 $Q(t)$ 为初值段上的伴生函数。例如,取 $f(u,v,w) \equiv u$; $f(u,v,w) \equiv v$; $f(u,v,w) = u^2v$ 等等。总之,$u(t)$ 等也可以当成一个伴生函数,因此,只讨论伴生函数列即可。

由任一光滑函数列 $f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_m,\cdots$,作出一列伴生函数 $Q_1(t),\ Q_2(t),\ \cdots,\ Q_m(t),\ \cdots$ 。

若把初值段 $u(t)$ 等换成初值序列(13),伴生函数变成了序列,称为伴生序列

$$q_i = f(u_i,\ v_i,\ w_i);\ i = \overline{1\ n}$$

记第 k 个伴生序列为

$$(Q_k):\ q_{k,1},\ q_{k,2},\cdots,\ q_{k,m};\ k = 1,2,\cdots$$

由 m 个伴生序列构成矩阵

$$W^m = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mn} \end{pmatrix} \tag{20}$$

若取 $m > n$,在 W^m 中必有若干个行相关组。例如前 P 行为相关组,则

$$\sum_{j=1}^{P} b_j(Q^j) = \sum_{j=1}^{P} b_j q_{ji} = \sum_{j=1}^{P} b_j f_j(u_i,v_i,w_i) = 0$$

$$A(u_i,v_i,w_i) = \sum_{j=1}^{P} b_j\ f_j(u_i,\ v_i,\ w_i),\ i = \overline{1\ n}$$

不变量的解析表示为

$$A(u,\ v,\ w) = \sum_{j=1}^{P} b_j\ f_j(u,\ v,\ w) \tag{21}$$

显然,从 W^m 中可以找到许多不变量。若更换伴生函数,又可得到新的不变量。

如上作法十分有趣,对处理应用问题具有启发性。如力学中的经验公式,是科学家从大量

实况观察中拟想出来的。在挑选伴生函数时，大可发挥人的直觉能力。

如果序列(13)过长，即 n 充分大，那么可以借助有限傅氏变换（或其他变换）方法作近似估算。这种方法还可以处理初值段上的问题。简述如下，取 $[0,T)$ 上某完备基 $\{\Phi_j\}$，使得

$$f_k(u(t), v(t), w(t)) = Q_k(t) = \sum_{j=1}^{\infty} S_j^k \Phi_j(t)$$

$$Q_k(t) \rightarrow (S_1^k, S_2^k, \cdots, S_p^k)$$

对 m 个伴生函数，展开到 p 项中得

$$W^m = \begin{bmatrix} S_1^1 & S_2^1 & \cdots & S_p^1 \\ S_1^2 & S_2^2 & \cdots & S_p^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_1^m & S_2^m & \cdots & S_p^m \end{bmatrix}$$

由 W^m 构造近似不变量方法同前述。处理长序列借助有限傅氏变换法，此处不再赘述。

3 结 语

本文阐明了不变量方法的背景、原理和步骤，有意忽略了细节说明。严格地讲，这种方法尚存在许多值得讨论的数学问题。作者在此借以抛砖引玉，以期与同行共同深入研究。

参 考 文 献

1 柯朗 R、希尔伯特 D. 数学物理方法：I 卷 . 熊振翔等译 . 北京：北京科学出版社，1977. 49～122

THE INVARIANT METHOD

Liu Guifu

(Department of Basic Courses, NIM, Nanjing 210044)

Abstract The method of invariant quantity is a mathematic tool by which a system of ordinary differential equations can be constructed for a limited-length time sequence and the sampled value of their solution in a limited time domain coincides with the given series. Observational study aims at the approach to a dynamic system whose equation is undeterminable. The method presented offers likelihood to carry out numerical experiments in a meteorological context.

Keywords dynamic system, semifluid, first-order partial differential equation, conservation law, invariant quantity, accompanying function