第 17 卷 第 2 期　　南京气象学院学报　　Vol. 17 No. 2
1994 年 6 月　　Journal of Nanjing Institute of Meteorology　　Jun. 1994

Hamilton 连通的一个充分条件*

孙学红
(南京气象学院基础科学系，南京，210044)

摘要　证明了如下结果：设 G 是阶为 $n(\geqslant 11)$ 的 3-连通图，若对 G 的所有距离为 2 的顶点 u、v，都有 $d(u)+d(v)\geqslant n-1$ 或 $|N(u)\cap N(v)|\geqslant \alpha+1$ 或 $|N(u)\cup N(v)|\geqslant n-\delta+1$，则 G 是 Hamilton 连通的。除非 G 属于一些特殊图类。

关键词　Hamilton 连通，独立数，最小度，简单无向图
分类号　O157.5

1　结果陈述和证明预备

本文只讨论简单无向图，文中未定义的记号和术语见文献[1]。

设 G 是图，用 $|G|$ 表示 G 的顶点个数；如 G 是路，则 $|G|$ 表示路 G 的顶点个数。

设 P 是路，把 P 上顶点按次序排列，可表示为 $P=v_1v_2\cdots\cdots v_t$，其中 v_1 称为始点，v_t 称为终点，定义 $v_i^+=v_{i+1}(i=2,\cdots,t)$，$v_i^-=v_{i-1}(i=1,\cdots,t-1)$。

定义一类图 $\overline{G}(r,t)$：对任意图 $G\in\overline{G}(r,t)$，$V(G)=V_1\cup V_2$，$|V_1|=r$，$G[V_1]$ 是任意一个图；$V_2=V_{21}\cup V_{22}\cup\cdots\cup V_{2t}$，对任意 j $(1\leqslant j\leqslant t)$ $G[V_{2j}]\cong K_1$ 或 $\cong K_2$，且 V_2 中每个顶点都与 V_1 中所有点相邻，或只有一个点与 V_1 中 $r-1$ 个点相邻，其余的点与 V_1 中所有点相邻。

文献[2]中证明了如下定理。

定理 1：设 G 是 n 阶连通图，具有独立数 α，如果 G 中任何一对距离为 2 的点 u、v 都有 $|N(u)\cap N(v)|\geqslant\alpha$，则 G 是 Hamilton 连通的，除非 G 同构于 $G'(\alpha,\alpha)$。

本文讨论 3-连通图，结合度和条件与邻域并的条件，同时加强了邻域交的条件得到如下结论

定理 2：设 G 是 $n(\geqslant 11)$ 阶 3-连通图，具有独立数 α，最小度 δ。如果 G 中任意一对点 $u\neq v$，当 $d(u,v)=2$ 时，都有 $d(u)+d(v)\geqslant n-1$ 或 $|N(u)\cap N(v)|\geqslant\alpha+1$ 或 $|N(u)\cup N(v)|\geqslant n-\delta+1$ 成立，则 G 是 H-连通的，除非 G 属于 $\overline{G}(\alpha,\alpha)$ 或 $\overline{G}(\alpha-1,\alpha)$。

以上两个结果是不可比较的。

为了证明定理 2，先证几个引理，讨论非 H-连通图的一些性质。

设 G 是 n 阶 3-连通图，G 不是 H-连通图，独立数为 α，最小度为 δ，则存在两点 $u\neq v\in V(G)$，使最长的 $u-v$ 路 P 不是 Hamilton 路。设 $P=v_1v_2\cdots v_t$，其中 $v_1=u$，$v_t=v$。令 B 是 $G-V(P)$ 的任一连通分支，$N_P(B)=\{v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_m}\}$。

若 u，v 中只有一点与 B 相邻，则记与 B 相邻的点为 u；若 u、v 都与 B 相邻，则 v_{i_m-1} 不存

* 国家自然科学基金资助项目
收稿日期：1993－02－13；改回日期：1993－04－23

在。为了叙述方便，仍设 $N^-=\{v_{i_1-1},v_{i_2-1},\cdots,v_{i_m-1}\}$，则 $|N^-|=m$ 或 $m-1$。得出一些与文献[1]中引理 4 平行的性质。

性质 1：对所有 $x\in V(B)$，$N^-\cup\{x\}$ 是独立集。

性质 2：设 $u_i,u_j\in N^-(i<j)$，则对任意 $\omega\in v_1Pu_i^-$，有 $u_i\omega\notin E(G)$ 或 $u_j\omega^-\notin E(G)$；对任意 $\omega\in u_i^-Pu_j^-$，有 $u_i\omega\notin E(G)$ 或 $u_j\omega^-\notin E(G)$；对任意 $\omega\in u_j^-Pv_t$，有 $u_i\omega^-\notin E(G)$ 或 $u_j\omega\notin E(G)$。

性质 3：对任意 $v_{i_j-1}\in N^-$ 及任一与 v_{i_j} 相邻的点 $x_j\in V(B)$，有 $|N(v_{i_j-1})\cup N(x_j)|\leqslant n-\delta$。

证明几个引理：

引理 1：对任意 $v_{i_j-1}\in N^-$ 及任意与 v_{i_j} 相邻的点 $x_j\in V(B)$，有 $d(x_j)+d(v_{i_j-1})<n+1$ 且 $|N(x_j)\cap N(v_{i_j-1})|<\alpha+1$ 且 $|N(x_j)\cup N(v_{i_j+1})|<n-\delta+1$。

证明：由性质 1，$d(x_j)+d(v_{i_j+1})\leqslant|V(B)|-1+m+n-|V(B)|-|N^-|\leqslant n$。

又由性质 1 得 $\alpha\geqslant|N^-|+1\geqslant m$。再由 $N(x_j)\cap N(v_{i_j-1})\subseteq V(P)$ 得 $|N(x_j)\cap N(v_{i_j-1})|\leqslant|N_P(B)|=m<\alpha+1$。

性质 3 说明 $|N(x_j)\cup N(v_{i_j-1})|<n-\delta+1$。

引理 2：对任意 $x\neq y\in N^-$，有 $d(x)+d(y)<n+1$ 且 $|N(x)\cap N(y)|<\alpha+1$ 且 $|N(x)\cup N(y)|<n-\delta+1$。

证明：由性质 2，$d_P(x)+d_P(y)\leqslant|V(P)|+1$。因此由 P 最长得

$$d(x)+d(y)\leqslant(n-|V(P)|-|V(B)|)(|V(P)|+1)\leqslant n<n+1$$

对任一点 $x_0\in V(B)$ 有 $d(x_0)\leqslant|V(B)|-1+m\leqslant|V(B)|+|N^-|$。再由性质 1 可以得到

$$|N(x)\cup N(y)|\leqslant n-|N^-|-|V(B)|\leqslant n-d(x_0)<n-\delta+1$$

证明 $|N(x)\cap N(y)|<\alpha+1$：

设 $N(x)\cap N(y)=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}=Y$，$Y^-=\{y_i^-:y_i\in Y\}$。若 $y_1=u$，则 y_1^- 不存在。所以 $|Y^-|\geqslant m-1$。

对任一 $x_0\in V(B)$，证明 $\{x_0\}\cup Y^-$ 为独立集。由性质 1，x_0 和 Y^- 中任一点不相邻，另一方面，若存在 $y_p^-,y_q^-\in Y^-$ $(p\neq q)$ 使得 $y_p^-y_q^-\in E(G)$，则类似[1]中引理 4(5)的证明得更长 $u-v$ 路，与 P 最长矛盾，所以有 $|\{x_0\}\cup Y^-|\leqslant\alpha$，即 $|N(x)\cap N(y)|<\alpha+1$。

引理 3：对任意 $x\neq y\in N^-$，有 $d_P(x)+d_P(y)\leqslant|P|+1$。

由性质 2 容易证明引理 3。

2　主要定理的证明

证明：设 G 是满足定理条件的图。若 G 不是 H-连通图，则存在两点 $u\neq v\in V(G)$，使 G 中最长的 $u-v$ 路 P 不是 Hamilton 路。令 B 是 $G-V(P)$ 的任一连通分支。

首先由引理 1、引理 2 和定理条件可得如下推断：

推断 1：对任意 $x\neq y\in V(G)$，当 $d(x,y)=2$ 时，有 $d(x)+d(y)=n-1$ 或 n。

推断 2：对任意 $x\neq y\in N^-\cup\{x_j\}$（其中 $x_j\in V(B)$ 为任一与 v_{i_j} 相邻的点，$j=1,\cdots,m$），则有 $d(x)+d(y)=n-1$ 或 n。

类似于文献[3]中几个断言的讨论，可以得到：若 G 不是 H-连通图，则在定理条件下有 $|P|=n-1$ 或 $n-2$，即 $|B|=1$ 或 2。

现讨论 B 中点的度数。

设 $x\in V(B)$，则显然有

$$d(x) \leqslant |B| + \frac{1}{2}(|P| - 1) \tag{1}$$

同时有$|N_P^+(x)| \geqslant 2$。这是因为：当$|B|=1$时，因为G是3-连通的，所以$|N_P(B)| \geqslant 3$，所以$|N_P^+(x)| \geqslant 2$。当$|B|=2$时，设$y \neq x, y \in V(B)$。若$|N_P^+(x)|=1$，则因G是3-连通的，必有ux、$vx \in E(G)$，且$d(x)=3$，且有$v_j \notin \{u,v\}$，$v_j \in P$使$v_j y \in E(G)$。

因$d(x,v_2)=d(y,v_{j-1})=2$，由推断1得$d(x)+d(v_2) \geqslant n-1$，$d(y)+d(v_{j-1}) \geqslant n-1$，又由引理3得$d(v_2)+d(v_{j-1})=d_P(v_2)+d_P(v_{j-1}) \leqslant |P|+1=n-1$。所以$d(y) \geqslant 2(n-1)-d(x)-d(v_2)-d(v_{j-1}) \geqslant 2(n-1)-3-(n-1)=n-4$，因$n \geqslant 11$，，所以$d(y) > \frac{1}{2}(n+1)$与(1)式$d(y) \leqslant 2+\frac{1}{2}(n-3)=\frac{1}{2}(n+1)$矛盾。

这说明$|N_P^+(x)| \geqslant 2$，因此有$v_{i-1} \neq v_{j+1} \in N_P^+(x)$。由推断2及引理3得：$d(x)+d(v_{i-1}) \in N_P^+(x)$。由推断2及引理3得：$d(x)+d(v_{i-1}) \geqslant n-1$，$d(x)+d(v_{j-1}) \geqslant n-1$，$d(v_{i-1})+d(v_{j-1}) \leqslant d_P(v_{i-1})+d_P(v_{j-1})+|G-P-B| \leqslant |P|+1+|G-P-B|$，所以有

$$d(x) \geqslant n - \frac{1}{2}(|P| + |G - P - B| - \frac{3}{2}) \tag{2}$$

对P和B分情形讨论。

情形1：当$|P|=n-1$即$|B|=1$

设$x \in B$，则由(1)式得$d(x) \leqslant |B|+\frac{1}{2}(|P|-1)=\frac{1}{2}n$，由(2)式得

$$d(x) \geqslant n - \frac{1}{2}(|P| + |G - P - B|) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(n-2)$$

所以$d(x)=\frac{1}{2}n$或$\frac{1}{2}(n-1)$或$\frac{1}{2}(n-2)$。

(1)当$d(x)=\frac{1}{2}n$时，$N_P(x)=\{v_1(=u),v_3,\cdots,v_{n-1}(=v)\}$，而$S=\{x,v_2,v_4,\cdots,v_{n-2}\}$为独立集。再由推断2可得$S$中任两点度和为$n-1$或$n$，所以$G$属于$\overline{G}(\frac{1}{2}n,\frac{1}{2}n)=\overline{G}(\alpha,\alpha)$。

(2)当$d(x)=\frac{1}{2}(n-1)$时，u、v中至多有一个与x不相邻。

1)若u、v中有一个不与x相邻，不妨设$vx \notin E(G)$，则$N_P(x)=\{v_1(=u),v_3,\cdots,v_{n-2}\}$，而$S=\{x,v_2,v_4,\cdots,v_{n-3},v_{n-1}(=v)\}$是独立集。再由推断2得$G$属于$\overline{G}(\frac{1}{2}(n-1),\frac{1}{2}(n+1))=\overline{G}(\alpha-1,\alpha)$。

2)若ux、$vx \in E(G)$，则存在i，使得$v_i x \in E(G)$，$v_{i-1}x \notin E(G)$，$v_{i+2}x \notin E(G)$，$v_{i+3}x \in E(G)$，则$N_P(x)=\{v_1(=u),v_3,\cdots,v_i,v_{i-3},\cdots,v_{n-1}(=v)\}$，而$S=\{x,v_2,v_4,\cdots,v_{i+1},v_{i+4},\cdots,v_{n-2}\}$为独立集。再由推断2得$G$属于$\overline{G}(\frac{1}{2}(n-1),\frac{1}{2}(n-1))=\overline{G}(\alpha,\alpha)$。

(3)当$d(x)=\frac{1}{2}(n-2)$时

1)若$ux \in E(G)$，$vx \in E(G)$且存在i，使得$v_i x \in E(G)$，$v_{i-j}x \notin E(G)(j=1,2,3)$，$v_{i+4}x \in E(G)$，则$N_P(x)=\{v_1(=u),v_3,\cdots,v_i,v_{i-4},\cdots,v_{n-3},v_{n-1}(=v)\}$，而$S=\{x,v_2,v_4,\cdots,v_{i-1},v_{i-5},\cdots,v_{n-2}\}$为独立集。由推断2知$S$中任两点度和为$n-1$或$n$，所以$S$中每个点必与$\{v_{i+2}\} \cup N_P(x)$中所有点相邻，由$P$的最长性必有$v_{i-1}v_{i+3} \notin E(G)$，所以$S \cup \{v_{i+3}\}$也为独立集，于是$G$属于$\overline{G}(\frac{1}{2}n,\frac{1}{2}n)=\overline{G}(\alpha,\alpha)$。

2）对其余情形，因为 $n\geqslant 11$，则 $d(x)\geqslant 5$，所以存在 $v_{i+1}\neq v_{j+1}\in N_P^-(x)$，使得 $d(v_{i+1})\leqslant|N_P(x)|=\frac{1}{2}(n-2)$，$d(v_{j+1})\leqslant|N_P(x)|=\frac{1}{2}(n-2)$，即 $d(v_{i+1})+d(v_{j+1})\leqslant n-2$。而由推断 2 可得 $d(v_{i+1})+d(v_{j+1})\geqslant n-1$ 矛盾。

情形 2：当 $|P|=n-2$，$|B|=1$。

设另一分支为 B_1，则 $|B_1|=1$。

设 $x_1\in B$，$x_2\in B_1$，则由（1）式得 $d(x_1)\leqslant|B|+\frac{1}{2}(|P|-1)=\frac{1}{2}(n-1)$，由（2）式得 $d(x_1)\geqslant n-\frac{1}{2}(|P|+|G-P-B|)-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(n-2)$，所以 $d(x_1)=\frac{1}{2}(n-1)$ 或 $\frac{1}{2}(n-2)$。同理 $d(x_2)=\frac{1}{2}(n-1)$ 或 $\frac{1}{2}(n-2)$。因为 n 为正整数，度为非负整数，可推出

$$d(x_1)=d(x_2)=\frac{1}{2}(n-1)\text{ 或 }\frac{1}{2}(n-2)$$

（1）当 $d(x_1)=d(x_2)=\frac{1}{2}(n-1)$ 时，$N_P(x_1)=\{v_1(=u),v_3,\cdots,v_{n-2}(=v)\}$，且 $N_P(x_2)=N_P(x_1)$。而 $S=\{v_2,v_4,\cdots,v_{n-3},x_1,x_2\}$ 是独立集，再由推断 2 可得 G 属于 $\overline{G}(\frac{1}{2}(n-1),\frac{1}{2}(n+1))=\overline{G}(\alpha-1,\alpha)$。

（2）当 $d(x_1)=d(x_2)=\frac{1}{2}(n-2)$ 时，因为 $n\geqslant 11$，则 $d(x_1)\geqslant 5$。所以存在 $v_{i+1}\neq v_{j+1}\neq v_{k+1}\in N_P^-(x_1)$。$v_{i+1}$、$v_{j+1}$、$v_{k+1}$ 中至少有两个不与 x_2 相邻，不妨设 v_{i+1} 和 v_{j+1} 不与 x_2 相邻，则 $d(v_{i+1})+d(v_{j+1})\leqslant 2|N_P(x_1)|=n-2$。再由推断 2 可得 $d(v_{i+1})+d(v_{j+1})\geqslant n-1$ 矛盾。

情形 3：当 $|P|=n-2$，$|B|=2$。

设 $x_1\neq x_2\in B$，则由（1）式得 $d(x_1)\leqslant|B|+\frac{1}{2}(|P|-1)=\frac{1}{2}(n+1)$，由（2）式得 $d(x_1)\geqslant n-\frac{1}{2}(|P|+|G-P-B|)-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(n-1)$，所以 $d(x_1)=\frac{1}{2}(n+1)$ 或 $\frac{1}{2}n$ 或 $\frac{1}{2}(n-1)$。同理 $d(x_2)=\frac{1}{2}(n+1)$ 或 $\frac{1}{2}n$ 或 $\frac{1}{2}(n-1)$。因为 n 为正整数，度为非负整数，可推出 $d(x_1)=d(x_2)=\frac{1}{2}(n+1)$ 或 $\frac{1}{2}n$ 或 $\frac{1}{2}(n-1)$；或 $d(x_1)=\frac{1}{2}(n+1)$，$d(x_2)=\frac{1}{2}(n-1)$。但对满足定理条件的图，这些显然是不可能的。

综合上面的讨论，可得满足定理条件的图 G，若不是 H-连通，则必属于 $\overline{G}(\alpha,\alpha)$ 或 $\overline{G}(\alpha-1,\alpha)$。

3　补充说明

当 G 的阶 $n\leqslant 10$ 时，满足本定理条件，而不 H-连通图的情形。

因为 G 是 3-连通的，所以必有 $n\geqslant 6$。按照本定理证明的思路进行讨论，易得如下结论：

$n=6$，G 属于 $\overline{G}(3,3)$；

$n=7$，G 属于 $\overline{G}(3,4)$ 或 $\overline{G}(3,3)$；

$n=8$，G 属于 $\overline{G}(4,4)$ 或 $\overline{G}(3,4)$ 或 $\overline{G}(3,3)$；

$n=9$，G 属于 $\overline{G}(4,5)$ 或 $\overline{G}(4,4)$；

$n=10$，G 属于 $\overline{G}(5,5)$ 或 $\overline{G}(4,5)$ 或 $\overline{G}(4,4)$。

致谢：本工作得到东南大学数学力学系宋增民教授的指导；顾国华同志阅读了初稿，并提出了很好的修改意见。特此致谢！

参 考 文 献

1 宋增民. 图论与网络最优化. 南京：东南大学出版社，1990，

2 宋增民，秦玉升. 邻集交与 Hamiltonian 性质. 东南大学学报，1991，21(3)：65～67

3 吕庆执，宋增民. Hamiltonian 图的一个新的充分条件. 东南大学学报，1992，22(3)：75～80

A SUFFICIENT CONDITION FOR HAMILTON-CONNECTED GRAPH

Sun Xuehong

(Department of Basic Sciences, Nanjing Institute of Meteorology, 210044, Nanjing, PRC)

Abstract Under the assumption that G is let to be a 3-connected graph of order $n(n \geqslant 11)$, it has proved that, if for all vertices at an interval of 2 in between (i. e. , $d(u,v)=2$) u and v for G , $d(u)+d(v) \geqslant n-1$ or $|N(u) \cap N(v)| \geqslant \alpha+1$ or $|N(u) \cup N(v)| \geqslant n-\delta+1$ holds, then G is Hamilton-connected unless G belongs to some special groups of graphs.

Keywords Hamilton-connected, independent number, minimum degree, simple nondirectional graph