第16卷第3期 南京气象学院学报 Vol. 16 №3
1993年9月 Journal of Nanjing Institute of Meteorology Sep. 1993

气体绝热运动过程中的非线性声波

管兆勇
（南京气象学院）

摘要 在绝热无摩擦假定下，对空气流动过程中的非线性压缩性波进行了一组解析解的分析，指出这种波动具有单向传播性并沿着流线（流线平行时）传播，且在足够复杂的初始场下可形成激波。对解释与空气可压缩性有关的现象等有一定意义。

关键词 绝热运动，非线性，波动传播

在大气大尺度动力过程中，除了静力适应问题之外，一般认为声波是不重要的。但是，自然界中的声波现象又是重要的，尤其是涉及到一些微物理过程时更是如此。因此，本文就空气的可压缩性运动的非线性过程作一些研究。

无摩擦绝热流体中，一维非线性声波的描述方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ p = a\rho^{\gamma}, \qquad a > 0 \end{cases} \tag{1}$$

这里 a 为常数；$\gamma = c_p/c_v$ 为定压比热与定容比热之比，对大气而言，$\gamma \approx 1.40$；ρ 为密度；p 为气压；u 为速度。由此，我们讨论方程(1)的一组完整的非线性波的特解。

1 非线性声波

线性声波可由(1)式采用 Boussinesq 近似而得。我们利用平流方程来构造方程(1)的解。平流方程写为

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}u + (u + f(u))\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

其中 $f(u)$ 待定。设(2)式的解能够满足方程(1)的第(1)式，必有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\gamma a\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} - E(u)\right] = 0; \qquad \frac{dE(u)}{du} = f(u)$$

得到

$$\rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma-1}{\gamma a}E(u) + \frac{\gamma-1}{\gamma a}A \tag{3}$$

式中 A 是积分常数。要使 $\frac{Du}{Dt}=0$ 的解满足方程组(1)，还必须有(3)式满足方程(1)的第二式，由

$$-f(u)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\gamma-1}{\gamma a}E(u)\right] = -(\gamma-1)\left[\frac{\gamma-1}{\gamma a}E(u) + \frac{\gamma-1}{\gamma a}A\right]\frac{\partial u}{\partial x}$$ 得

收稿日期：1992－03－07

$$\frac{\gamma-1}{\gamma a}E(u)=\frac{f^2(u)}{\gamma a}-\frac{\gamma-1}{\gamma a}A \tag{4}$$

对(4)式求关于 u 的导数，得到

$$\frac{\gamma-1}{\gamma a}f(u)=\frac{2}{\gamma a}f(u)\frac{-\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}$$

于是定出函数 f

$$f(u)=\frac{\gamma-1}{2}u\pm\sqrt{a\gamma}b \tag{5}$$

这里 b 是积分常数。由(3)、(4)、(5)式有

$$\rho^{\gamma-1}=\left[\frac{u}{2\sqrt{a\gamma}}\pm b\right]^2 \tag{6}$$

而(2)式的解是

$$u=F(x-(u+f(u))t) \tag{7}$$

由(6)、(7)式作适当运算即得方程(1)的非线性波解

$$\begin{cases}\rho=\left[b\pm\dfrac{\gamma-1}{2\sqrt{a\gamma}}F(\xi)\right]^{2/(\gamma-1)},b>0\\ u=F(\xi)\\ \xi=x-[u\pm\sqrt{a\gamma}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}]t\end{cases} \tag{8}$$

取线性声波声速 $C_s=\sqrt{\gamma p_s\rho_s^{-1}}$，$p_s$、$\rho_s$ 不是(x,t)的函数，并取常数 $a=p_s/\rho_s^{\gamma}$，则

$$\begin{cases}\rho=\left[b\pm\dfrac{\gamma-1}{2C_s}\rho_s^{\frac{\gamma-1}{2}}u\right]^{\frac{2}{\gamma-1}}\\ \xi=x-\left[u\pm\left(\dfrac{\rho}{\rho_s}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}C_s\right]t\end{cases} \tag{9}$$

不难验证(8)式是方程(1)的一组解。常数 b 由流体静止时的密度决定，即 $b^{2/(\gamma-1)}=\rho_s$。由(8)式及(9)式可作如下讨论：

(1)单向传播性　当取“+”时，波动传播方向取决于 $u+C_s(\rho/\rho_s)^{\frac{\gamma-1}{2}}=C$ 的符号，当 $\rho\sim\rho_s$，$|u|\ll C_s$ 时，非线性波有正的传播方向，其气压与 u 的大小配置可见图1。当取“−”时，在 $\rho\sim\rho_s$、$|u|\ll C_s$ 时，波传播方向为反 x 轴方向。因此，由(8)式描述的波动只能有一个传播方向。同时，由(8)式知，密度场与流场间存在着固定的诊断关系，自由行波的初始场只有一个，$u|_{t=0}$或者是 $\rho|_{t=0}$。这里要指出，波的单向性是指(8)式中的“±”只能取“+”或者“−”，不可能取“+”的同时又取“−”。这有别于波解 $w=g(x+ct)+h(x-ct)$这样的形态。

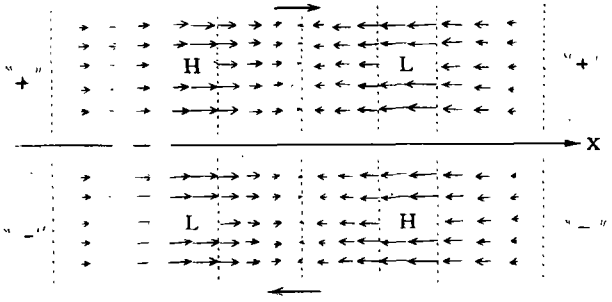

图1　相应(8)式中“+”、“−”的两种“风压场”配置
(点线为等压线，细箭头为 u 的大小和方向，粗箭头为传播方向)

(2)波速的变化性　由于波速 $C=u\pm C_s\left(\dfrac{\rho}{\rho_s}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}$，故波传播的速度随 x 和 t 发生改变即随着风速 u 和密度 ρ 的变化而变化。当 $|u|\sim C_s(\rho/\rho_s)^{\frac{\gamma-1}{2}}$时，$u$ 的大小严重地左右着声波的传播。因

此，空气作亚音速、音速、超音速运动时，声波的传播速度取“+”时 $C>C_*$，取“−”时 $C<C_*$（可能情况：$C\sim 0$或 $C<0$），理论上可存在后退声波和准静止声波。

(3)激波的形成　由初始场 $u|_{t=0}=m(x)$可确定出(8)式中的任意函数 F，从而

$$u = m\left(x - \left[u \pm C_*\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}\right]t\right)$$

于是

$$\frac{\partial p}{\partial x} = a\gamma\rho^{\gamma}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \pm\sqrt{a\gamma}\,\rho^{\frac{\gamma+3}{2}}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\xi}\Big/\left[1+\frac{\gamma+1}{2}t\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\xi}\right]$$

显然，只要初始场足够复杂，使得存在这样的时刻

$$t_c = \frac{-2}{\gamma+1}\Big/\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\xi} > 0$$

则当 $t\to t_c$ 时，$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\to\infty$，从而 $\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|\to\infty$，亦即出现压力分布的一阶不连续，而形成激波。这也是一般非线性运动的基本特征之一。

(4)波动类型与初始场　(8)式描写了具有一个任意初始场的波动，但(1)式可能存在另外一组非线性波解，它有两个独立的初始场 $\rho|_{t=0}$和 $u|_{t=0}$，此时可利用特征线方法[1]分析这种波动的传播方向。

通过以上分析，非线性声波与线性声波的主要差别表现在：波动传播方向的单向性和多变性（单支波解）；波速与密度和运动的速度有关；波形与初始场有关且可出现压力、密度和风速分布的时间和空间上的一阶不连续，可形成激波。

2　二维流动中的非线性波

空气流体在无摩擦、绝热时的二维流动的描述方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

$$p = a\rho^{\gamma}$$

这里 a,γ 同前；u、v 分别是 x 和 y 方向上的风速分量。使用自然坐标系(s,n,t)（s 为流线方向上的坐标，n 为垂直于流线方向的坐标并遵守右手法则，t 为时间），以便于问题研究的简化

$$\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial s}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+V\frac{\partial \rho}{\partial s}=-\rho\left(\frac{\partial V}{\partial s}+V\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)$$

$$V\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}+V\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

这里 V 为全风速，φ 为 $\vec{V}$ 与 $\vec{xi}$ 的夹角。假设 $\partial\varphi/\partial n\to 0$，即流线与流线之间平行或近于平行，则

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}+V\dfrac{\partial V}{\partial s}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial s} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+V\dfrac{\partial \rho}{\partial s}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial s} \\ p=a\rho^{\gamma} \end{cases} \tag{10}$$

描写了满足$\frac{\partial \varphi}{\partial n}\to 0$流场中的压缩性波动，而流线的弯曲和风向角的改变由$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+V\frac{\partial \varphi}{\partial s}+\frac{1}{\rho V}\frac{\partial p}{\partial n}=0$来描述。由(10)式易得

$$\begin{cases} \rho=\left[b\pm\dfrac{\gamma-1}{2\sqrt{a\gamma}}V\right]^{\frac{2}{\gamma-1}},\ b>0 \\ V=F(s-[V\pm\sqrt{a\gamma}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}]t) \end{cases} \tag{11}$$

其相应的"风压"场配置见图2。

(11)式表明除了具有一维非线性声波具有的特点之外，二维无流线辐合的声波是沿着流线传播的。由于流线是变动的，故在(x,y,t)坐标中，二维非线性声波的传播方向和速度是不断变化的。如果流线定常，则声波将沿着固定的曲线路径传播。

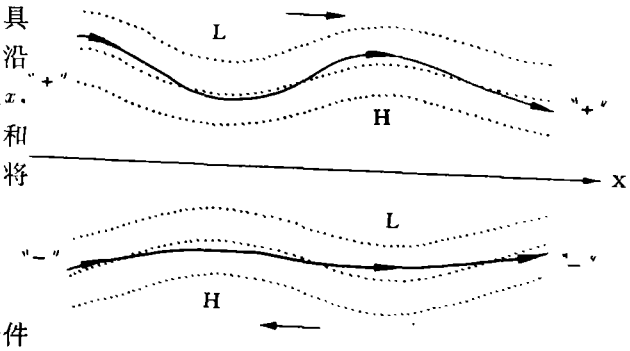

图2 相应于(11)式的两种风压场配置
(点线为等压线，细实线为流线，粗箭头为波传播基本方向)

3 结 论

通过对空气流动过程中绝热无摩擦条件下的非线性声波一组精确解的分析，指出这种波动具有单向传播特点并沿着流线方向传播(流线必须近于平行或平行)。在一定的初始场下可形成激波。该理论结果对解释与空气可压缩性有关的现象等具有一定的意义。

参 考 文 献

1 Whitham GB. *Linear and nonlinear waves*, John Wiley & Sons, 1974; 1

NONLINEAR ACOUSTIC WAVE IN ADIABATIC AIR MOTION

Guan Zhaoyong

(Nanjing Institute of Meteorology)

Abstract In this paper, the nonlinear compressible wave is dealt with analytically under the condition of adiabatic frictionless motion of air, indicating that this kind of acoustic wave propagates unidirectionally and along the streamlines (if they are parallel)and shock waves will be formed if the initial field is complex enough. Theoretical results may be of value in explaining some phenomena associated with compressibility of air.

Key words adiabatic motion, nonlinear, wave propagation