南 京 气 象 学 院 学 报
一九八五年　第一期

韦伯尔三参数模式在风能研究中的应用*

陈 佩 英

(四川省气象科学研究所)

提　　要

本文比较了韦伯尔(Weibull)二参数模式和韦伯尔三参数模式在风能研究中的应用，二参数模式是三参数模式的特例。计算结果表明：在近地面层，三参数模式更接近实际风速的分布。

一、前　言

在风能研究中，风能密度的估计很大程度上决定于所假设的概率密度函数。目前我国应用较广泛的是韦伯尔二参数模式，认为它基本上较好地拟合了实际风速的分布。Auwera等人提出韦伯尔三参数模式比其它一些常用概率密度函数更为一般化[1]，韦伯尔二参数模式是三参数模式的特殊情况。在近地面层(100米以下)，韦伯尔三参数模式比二参数模式更符合经验风速频率的分布，只有在较高的高度上，两模式才趋于一致，才能运用韦伯尔二参数模式。

二、韦伯尔三参数概率密度函数

瞬时风能公式为 $P=\frac{1}{2}\rho v^3$(瓦/米^2)，平均风能密度$\overline{P}$为$\overline{P}=E[P]=\frac{1}{2}\overline{\rho}E[v^3]$，即平均风能密度正比于风速的三阶非中心距。

韦伯尔三参数pdf(概率密度函数)的数学表达式为[1]

$$f(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(k/a)}\left(\dfrac{a}{c}\right)\left(\dfrac{v}{c}\right)^{k-1}\exp\left[-\left(\dfrac{v}{c}\right)^{a}\right] & a>0,\ k>0,\ c>0,\ v>0 \\ 0 & v\leqslant 0\end{cases} \qquad (1)$$

* 本文于1983年8月26日收到，1983年12月14日收到修改稿。

式中Γ为伽玛函数，a、k为形状参数，c为尺度参数，其单位与v相同。容易证明，当两形状参数相等时（$a=k$），方程（1）退化为韦伯尔二参数概率密度函数，即

$$f(v)=\left(\frac{k}{c}\right)\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1}\exp\left[-\left(\frac{v}{c}\right)^{k}\right]$$

韦伯尔-3的三参数a、k、c可用最大似然法估计。

设有一随机变量V有n个样本v_1，v_2，……，v_n，构成似然函数

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}\ln f(v_i)=n[\ln a-\ln\Gamma(k/a)-k\ln c]$$
$$+(k-1)\sum_{i=1}^{n}\ln v_i-\frac{1}{c^a}\sum_{i=1}^{n}v_i^a$$

选取参数a、k、c，使似然函数达最大，则

$$\frac{\partial\ln L}{\partial a}=\frac{\partial\ln L}{\partial k}=\frac{\partial\ln L}{\partial c}=0$$

得到如下最大似然方程组

$$\begin{cases} aT_3+\ln b-\psi\left(\frac{k}{a}\right)=0 & (2)\\ abT_1-k=0 & (3)\\ abT_2-kT_3-1=0 & (4)\end{cases}$$

其中$b=c^{-a}$，ψ为普西函数，且

$$T_1=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}v_i^a\qquad T_2=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}v_i^a\ln v_i\qquad T_3=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\ln v_i\qquad(5)$$

由方程（3）和（4）得

$$b=1/[a(T_2-T_1T_3)]\quad k=T_1/(T_2-T_1T_3)\qquad(6)$$

用（6）式代入方程（2），得到含参数a的非线性方程

$$aT_3-\ln[a(T_2-T_1T_3)]-\psi\left[\frac{T_1}{a(T_2-T_1T_3)}\right]=0\qquad(7)$$

此超越方程可用米勒二分法求解，其中$\psi(z)$以多项式形式展开，取前5项求出a，已知a，就可求得b、k，最后由$b=c^{-a}$，求得c。

根据实测风速资料算出韦伯尔分布的三个参数a、k、c，进而估计平均风能密度的统计特征。

风速v的数学期望为

$$E[v]=\int_0^{\infty} vf(v)dv$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{v}{\Gamma(k/a)}\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1}\exp\left[-\left(\frac{v}{c}\right)^a\right]dv$$

$$=\frac{1}{\Gamma(k/a)}\int_0^{\infty} v\left(\frac{v}{c}\right)^{k-a}\exp\left[-\left(\frac{v}{c}\right)^a\right]d\left[\left(\frac{v}{c}\right)^a\right]$$

令 $x=\left(\frac{v}{c}\right)^a$，则有 $v=cx^{\frac{1}{a}}$，于是上式可改写为

$$E[v]=\frac{1}{\Gamma(k/a)}\int_0^{\infty} cx^{\left(\frac{k+1}{a}-1\right)}e^{-x}dx$$

$$=c\frac{\Gamma[(k+1)/a]}{\Gamma(k/a)} \tag{8}$$

一般而言，如果一随机变量x符合于参数为 a、k、c 的韦伯尔-3的分布，那么随机变量$y(y=x^r)$也服从韦伯尔-3分布，此时三个参数分别变为a/r、k/r、c^r，因此 $r=3$ 时，由(8)式可得

$$E[v^3]=c^3\frac{\Gamma[(k+3)/a]}{\Gamma(k/a)} \tag{9}$$

至此，已不难求得一地的平均风能密度了。

三、计算结果的比较

计算一地的风能有两种基本方法，一是直接计算法，即用该地的实测风记录，根据风能定义计算风能密度。利用一天24小时的逐时风速资料统计出各级风速的频率，然后利用风能公式

$$W=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}N_i\rho v^3}{N}$$

计算出各级风速下的能量，再将各等级风能之和除以总时数，即为该地年(月)的平均风能密度。式中 N_i 和N分别表示各等级风速全年(月)累积小时数和总时数[2]。第二种方法是用某一种pdf去拟合经验风速频率分布。与前一种方法相比，无疑有一定的误差。显然，我们希望找到一种pdf，使之较好地拟合实际风速分布。本文分别用直接法、韦伯尔-2及韦伯尔-3模式，计算了云南丽江站、四川盐源站和会理站的一段时间(1981年2月—4月)

的平均风能密度，风速频数分布的分组以相隔1米/秒为一组(见表1)。韦伯尔-2模式的两个参数k、c用最小二乘法拟合得到。

表 1

站	方　　法	a	k	c	E[P](瓦/米^2)	x^2
盐源	直 接 法				80	
	韦 伯 尔-3	1.64	1.31	5.33	88	100
	韦 伯 尔-2	1.08	1.08	3.00	57	482
丽江	直 接 法				71	
	韦 伯 尔-3	2.56	1.70	6.04	70	65
	韦 伯 尔-2	1.54	1.54	3.37	34	1024
会理	直 接 法				25	
	韦 伯 尔-3	1.71	1.17	4.02	31	136
	韦 伯 尔-2	0.88	0.88	1.47	8	931

由表1可见,从平均风能值与χ^2(检验)值看,都充分显示出韦伯尔-3模式较韦伯尔-2模式优越。计算结果表明，韦伯尔-3模式中的参数a並不等于k，因此,若应用 韦伯尔-2模式必将导致相当大的误差。如丽江站，用韦伯尔-2计算出的平均风能密度只是直接法计算出的一半，而用韦伯尔-3与直接法算出的结果比较，两者非常接近，並且韦伯尔-3

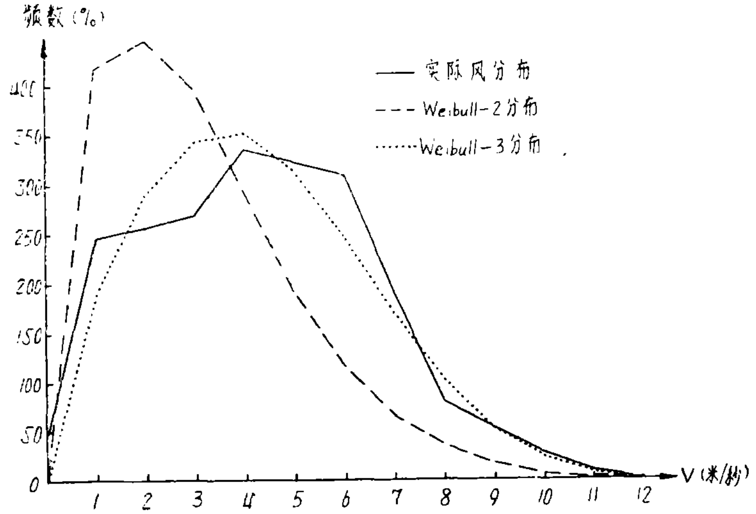

图 1　韦伯尔-3和韦伯尔-2的pdf拟合实际风速分布的比较

模式的χ^2值明显偏小。由丽江站资料算出的形状参数a与k差别较大，所以用韦伯尔-2模式计算所得结果误差也较大。

图1是韦伯尔-2和韦伯尔-3模式对实际风速分布的拟合情况。由图可见，韦伯尔-3

的pdf曲线与实际风速分布曲线吻合较好，而韦伯尔-2的pdf曲线的峰值向低风速处偏移，致使风能估算较实际风能值明显偏小，这已由表1的计算结果所证实。

四、结　　语

三参数的韦伯尔模式比二参数的韦伯尔模式更为一般化，后者是前者的特殊情况。目前风速仪高度为10米左右，在此高度上，一般而言，参数a不等于k，故应用韦伯尔-2模式将导致较大误差，计算结果表明，韦伯尔-3模式对实际风速分布的拟合比韦伯尔-2模式要好些。

Auwera等人提出，在100米以上，韦伯尔-3模式的形状参数近似相等，可应用韦伯尔-2模式，由于作者目前缺乏百米以上的风速资料，有待进一步探讨。

参 考 文 献

〔1〕 Auwera, L. V., Meyer, F.D., Melet,L. M., The Use of the Weibull Three-Parameter Model for Estimating Mean Wind Power Densities, J. Appl. Met.,Vol.19, No.7, 1980.

〔2〕 朱瑞兆、薛桁，风能的计算和我国风能的分布，气象，8，1981。