

线性约束和奇异 SS&CP 矩阵下 LS 回归的扫描算子

吕纯濂

(南京气象学院基础科学系, 南京 210044)

摘 要 描述在线性约束条件下, 且平方和与交叉乘积矩阵在奇异病态情况下, 最小二乘回归扫描算子的一些特性。尽管有其他许多不同的方法, 由于扫描算法的简单, 以及其有关运算矩阵元素所具有的统计意义, 使得它在统计应用中成为最灵活的工具之一, 而且更重要的是, 其输出结果的解释与标准情况下输出结果的解释很好地保持了一致性。

关键词 统计计算, 扫描算子, 最小二乘, 回归分析

分类号 O241. 6

在最小二乘估计(LSE)算法中求解正规方程组是扫描(SWEEP)算子应用的一典型例子。值得提出的是, 在许多统计过程^[1, 2], 如非线性最小二乘法、逐步回归、判别分析和在广泛应用的统计库 BMDP^[3]中的许多其他统计方法都用到 SWEEP 算子的技巧。

本文的主要兴趣在于, 将 SWEEP 算子应用于相应的平方和与交叉乘积(SS&CP)矩阵在奇异病态条件下和参数有线性约束的系统中。

1 定义和符号

1. 1 SWEEP 算子

考虑 $p \times p$ 对称方阵 $A = A^T = (a_{ij})$, SWEEP 算子作用于 A 的第 k 个非零对角元素($a_{kk} \neq 0$), 即所有 a_{ij} 用以后定义的 a_{ij}^* 代替:

$$\begin{cases} a_{kk}^* = \frac{1}{a_{kk}} \\ a_{ik}^* = -a_{ki}^* = -\frac{a_{ik}}{a_{kk}}, & i \neq k \\ a_{ij}^* = a_{ij} - \frac{a_{ik}a_{kj}}{a_{kk}} = a_{ij} - a_{ik}a_{kj}^*, & i, j \neq k \end{cases}$$

初始元素 a_{kk} 称为扫描的主元, 以 a_{kk} 为主元的扫描过程记为 SWEEP(a_{kk})。

若矩阵 A 非奇异, 则对所有非零对角元素扫描的结果并不依赖于扫描的次序。若 A 奇异, 则该结论仅对 A 中非奇异子矩阵的对角元素进行扫描时才是正确的, 后者允许形式上应用于分块矩阵的各子矩阵。设对称方阵 A 分块如下:

$$A = \begin{pmatrix} G & Q \\ Q^T & D \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中 G 和 D 为对称子方阵, G 满秩, 对 G 的非零对角元素应用 SWEEP 算子, 将 A 转换为

$$A^* = \begin{pmatrix} G^{-1} & G^{-1}Q \\ -Q^TG^{-1} & D - Q^TG^{-1}Q \end{pmatrix}$$

1. 2 SWEEP 算子作用于逆矩阵和广义逆矩阵

设奇异对称矩阵 A 如 (1) 式那样分块, 且它右边的子矩阵 $(Q^T D^T)^T$ 的各列是左边子矩阵 $(G^T Q)^T$ 相应列的线性组合, 即存在矩阵 B 使 $Q = GB$, $D = Q^T B$, 而 $B = G^{-1}Q$, 应用以主元 G 的 SWEEP 算子, 则有 (1) 式矩阵 A 变为:

$$A^* = \begin{pmatrix} G^{-1} & G^{-1}Q \\ -Q^TG^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

等式 $D - Q^TG^{-1}Q = 0$ 是上述矩阵 A 中线性相关假设的显然结果, 所得矩阵是 A 的 g_1 -广义逆 A^- (按文献 [1], 若 $AA^-A = A$, 则 A^- 称为 A 的 g_1 -广义逆; 若 $AA^-A = A$ 且 $A^-AA^- = A^-$, 则称 A^- 为 A 的 g_2 -广义逆) [3]。

若 (2) 式中矩阵 A^* 的右上角子矩阵 $(G^{-1}Q)$ 和左下角子矩阵 $(-Q^TG^{-1})$ 用 0 子矩阵代替, 则新矩阵为 A 的 g_2 -广义逆矩阵。

1. 3 SWEEP 算子作用于 LS 回归

考虑最小二乘 (LS) 线性回归问题:

$$\min_b Y - Xb \quad (3)$$

其中 X 是 $n \times p$ 说明性变量矩阵, Y 为 $n \times 1$ 观测向量, b 为 $p \times 1$ 要估计的未知参数向量。令矩阵 A 为数据增广矩阵 $(X \ Y)$ 的相应 SS&CP 矩阵, 自然分块为:

$$A = \begin{pmatrix} X^T X & X^T Y \\ Y^T X & Y^T Y \end{pmatrix}$$

用 SWEEP 算子作用于 A 的非奇异子矩阵 $X^T X$ 的所有对角元素, 则有

$$A^* = \begin{pmatrix} (X^T X)^{-1} & (X^T X)^{-1} X^T Y \\ -Y^T X (X^T X)^{-1} & Y^T Y - Y^T X (X^T X)^{-1} X^T Y \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中右上角的 $(X^T X)^{-1} X^T Y = : \beta$ (等于左下角的转置负值) 是使 (3) 式达极小的 b 的估计, 而右下角的 $Y^T Y - Y^T X (X^T X)^{-1} X^T Y = : RSS$ 为相应的剩余平方和。

当矩阵 $X^T X$ 奇异且 SWEEP 算子不作用于 $(X^T X)^{-1}$ 而作用于 g_2 -广义逆 $(X^T X)^-$ 时, 结论仍成立 [3]。

1. 4 SWEEP 算子作用于线性约束下的 LS 回归

考虑具有在某些线性子空间中使达极小的附加约束的 LS 线性回归问题

$$\min_{\{b \mid Lb = c\}} Y - Xb \quad (5)$$

其中 L 为 $q \times p$ 满秩矩阵, b 和 c 分别为 $p \times 1$ 和 $q \times 1$ 向量, 该问题的解为 [6]:

$$\beta = \beta_+ (X^T X)^{-1} [L(X^T X)^{-1} L^T]^{-1} (c - L\beta_+) \quad (6)$$

其中 β_+ 为相应无约束问题 (3) 式的估计。

若 A 的子块 $X^T X$ 满秩, 则也可同样精确地用 SWEEP 算子对 SS&CP 适当增广的矩阵作用而得到同样的结论。在这种情况下使用 SWEEP 算子由两步组成:

第一步是对 SS&CP 如下增广的矩阵的主元 $X^T X$ 进行扫描, 即

$$\begin{pmatrix} X^T X & X^T Y & L^T \\ Y^T X & Y^T Y & c^T \\ L & c & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{SWEEP}(X^T X)} \begin{pmatrix} (X^T X)^{-1} & (X^T X)^{-1} X^T Y & (X^T X)^{-1} L^T \\ -Y^T X (X^T X)^{-1} & Y^T Y - Y^T X (X^T X)^{-1} X^T Y & c^T - Y^T X (X^T X)^{-1} L^T \\ -L (X^T X)^{-1} & c - L (X^T X)^{-1} X^T Y & -L (X^T X)^{-1} L^T \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (X^T X)^{-1} & \beta & (X^T X)^{-1} L^T \\ -\beta^T & RSS & c^T - \beta^T L^T \\ -L (X^T X)^{-1} & c - L\beta & -L (X^T X)^{-1} L^T \end{pmatrix}$$

第二步再对上式右下块扫描, 即 $\text{SWEEP}(-L(X^T X)L^T)$, 该扫描的结果为(用 $Q = (L(X^T X)^{-1}L^T)^{-1}$):

$$\begin{pmatrix} (X^T X)^{-1} - (X^T X)^{-1} L^T Q L (X^T X)^{-1} \\ -\beta^T - (c^T - \beta^T L^T) Q L (X^T X)^{-1} \\ Q L (X^T X)^{-1} \\ \beta + (X^T X)^{-1} L^T Q (c - L\beta) & (X^T X)^{-1} L^T Q \\ RSS + (c^T - \beta^T L^T) Q (c - L\beta) & (c^T - \beta^T L^T) Q \\ Q (c - L\beta) & -Q \end{pmatrix}$$

第二步后, 正常无约束问题(3)式 LS 的解 β 转换为具有线性约束(6)式表达的估计 $\hat{\beta}$, 而且, 以上矩阵左上角的四个子矩阵与 LS 回归中(4)式中的子矩阵具有相同的统计解释, 即右上角的 $\hat{\beta} = \beta + (X^T X)^{-1} L^T Q (c - L\beta)$ (等于左下角的转置负值)是使(5)式达极小的 b 的估计, 而此时相应的剩余平方和为右下角的 $RSS + (c^T - \beta^T L^T) Q (c - L\beta)$ 。

1.5 SWEEP 算子作用于奇异 SS&CP 矩阵

SWEEP 算子作用于无约束奇异 SS&CP 矩阵的问题在文献[1]中有详细描述。但必须注意到, 在计算机应用的框架中, 相应的 SS&CP 矩阵的奇异性和病态条件是紧密联系的, 并且是可以一并处理的。

而且, 即使 $X^T X$ 奇异, 等式(6)仍成立, 此时(6)式中要用到广义逆 $(X^T X)^{-}$ [6]。

2 线性约束和奇异 SS&CP 矩阵下 LS 回归的 SWEEP 算子

若 $\text{SWEEP}(X^T X)$ 用于奇异 SS&CP 矩阵, 则基于 SWEEP 算子的方法就会出问题, 因为解不唯一, 而且扫描的次序就会变得相当重要。例如, 第一步只能用与约束无关的变量作为扫描的主元, 而第二步的扫描就不可能再进行下去。在无约束的情况下, 若出现奇异性, 则通常附加某些约束条件来求解和求相应的逆矩阵, 特别如在 1.2 节中描述的那样, 可以在适当的地方置零, 但若有约束, 则如在 1.4 节中描述的那样的第二步 $\text{SWEEP}(-L(X^T X)L^T)$ 就是必要的。这样, 原来的约束和用于求所选广义逆的附加约束之间可能会发生矛盾, 这可以用将原来的约束作为求所选广义逆的附加约束来克服这个矛盾, 这可用以下几步来实现:

- 1) 对 A 的左上块 $(X^T X)$ 的对角元素进行所有可能的(但非唯一的)扫描。
- 2) 对右下角的 $-L(X^T X)L^T$ 扫描, 并强迫扫描那些对应于受到约束的参数变量, 即对应于约束的假想变量进行所有的可能的扫描。

这些步骤的目的是至少对每一个带有约束的主元进行一次扫描, 而该主元与受到该约束的参数有关。

定理 设数据矩阵分割为 $(X \ x)$, 其中 X 为 $n \times p$ 满秩矩阵, x 为 $n \times 1$ 向量, 它与 X 的各列线性相关 (即存在向量 z 使得 $Xz = x$), 则对应的 SS&CP 矩阵可重写如下:

$$A = \begin{pmatrix} X^T X & X^T x & X^T y \\ x^T X & x^T x & x^T y \\ y^T X & y^T x & y^T y \end{pmatrix} \quad (7)$$

其中 y 为因变量的列向量。为方便, 假定约束 $(Lb = c)$ 改写为

$$c^T b + b^* = 0 \quad (8)$$

其中 p 维列向量 b 和常数 b^* 构成分割的未知参数向量 $(b^T \ b^*)^T$, 而 $(c^T \ 1)^T$ 为非零常数向量。

则对 SS&CP 矩阵 (7) 式和约束 (8) 式, 利用本节开始所述的 1 和 2 步可得到:

- (1) 带有给定约束且 SS&CP 矩阵奇异的相应 LS 回归的解;
- (2) 所得的解满足给定的约束条件。

(为了强调 b^* 从属于约束, 假定 c 用 1 增广, 这说明变量向量 x 必须包含在具有非零参数的回归模型中, 若 b^* 不从属于约束, 则问题就简化为删除 A 中相应的行和列, 且令 b^* 为零。)

证 第一步: 由 1.4 节所述算法, 在 SS&CP 矩阵 (7) 式中加一行和一列, 即

$$A = \begin{pmatrix} X^T X & X^T x & X^T y & c \\ x^T X & x^T x & x^T y & 1 \\ y^T X & y^T x & y^T y & 0 \\ c^T & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

然后, 用主元 $X^T X$ 进行矩阵扫描, 注意, 由假设知该元是满秩的, 用 $\text{SWEEP}(X^T X)$ 得:

$$\begin{pmatrix} M^{-1} & z & \beta & M^{-1}c \\ -z^T & 0 & 0 & 1 - z^T c \\ -\beta^T & 0 & RSS & -\beta^T c \\ -c^T M^{-1} & 1 - c^T z & -c^T \beta & -c^T M^{-1}c \end{pmatrix} \quad (9)$$

其中

$$M = X^T X, \quad z = (X^T X)^{-1} X^T x, \quad \beta = (X^T X)^{-1} X^T y,$$

$$RSS = y^T y - y^T H y, \quad \text{其中 } H = X (X^T X)^{-1} X^T,$$

$$0 = x^T x - x^T X (X^T X)^{-1} X^T x = x^T x - x^T X z = x^T x - x^T x,$$

$$0 = y^T x - y^T X (X^T X)^{-1} X^T x = y^T x - y^T X z = y^T x - y^T x$$

第二步: 再对 $-c^T M^{-1}c$ 进行扫描, 即利用 $\text{SWEEP}(-c^T M^{-1}c)$ 和符号 $R = (c^T M^{-1}c)^{-1}$ 得

$$\begin{pmatrix} M^{-1} - M^{-1}cRc^T M^{-1} & z + M^{-1}cR(1 - c^T z) & \beta - M^{-1}cRc^T \beta & M^{-1}cR \\ -z^T - (1 - z^T c)Rc^T M^{-1} & (1 - z^T c)R(1 - c^T z) & -(1 - z^T c)Rc^T \beta & (1 - z^T c)R \\ -\beta^T + \beta^T cRc^T M^{-1} & -\beta^T cR(1 - c^T z) & RSS + \beta^T cRc^T \beta & -\beta^T cR \\ Rc^T M^{-1} & -R(1 - c^T z) & Rc^T \beta & -R \end{pmatrix} \quad (10)$$

再对非零常数 $(1 - z^T c)R(1 - c^T z)$ 扫描, 用

$$S = S^T = ((1 - z^T c)R(1 - c^T z))^{-1} \text{ 和 } T = z + M^{-1}cR(1 - c^T z)$$

代替之, 则矩阵 (10) 变换为

$$\left(\begin{array}{ccc} M^{-1} - M^{-1}cRc^T M^{-1} + TST^T & - TS & \\ & - ST^T & S \\ - \beta^T + \beta^T cRc^T M^{-1} - \beta^T cR(1 - c^T z)ST^T & \beta^T cR(1 - c^T z)S & \\ & Rc^T M^{-1} - R(1 - c^T z)ST^T & R(1 - c^T z)S \\ \beta - M^{-1}cRc^T \beta + TS(1 - z^T c)Rc^T \beta & M^{-1}cR - TS(1 - z^T c)R & \\ & - S(1 - z^T c)Rc^T \beta & S(1 - z^T c)R \\ RSS + \beta^T cRc^T \beta - \beta^T cR(1 - c^T z)S(1 - z^T c)Rc^T \beta & - \beta^T cR + \beta^T cR(1 - c^T z)S(1 - z^T c)R & \\ & Rc^T \beta - R(1 - c^T z)S(1 - z^T c)Rc^T \beta & - R + R(1 - c^T z)S(1 - z^T c)R \end{array} \right)$$

注意 $(1 - z^T c)^{-1}(1 - z^T c) = I$, 并利用等式

$$\begin{aligned} R(1 - c^T z)S &= IR(1 - c^T z)((1 - z^T c)R(1 - c^T z))^{-1} \\ &= (1 - z^T c)^{-1}(1 - z^T c)R(1 - c^T z)((1 - z^T c)R(1 - c^T z))^{-1} \end{aligned}$$

则矩阵 (10) 可用更紧凑的形式变换而重写为

$$\left(\begin{array}{ccc} M^{-1} + zSz^T + z(1 - c^T z)^{-1}c^T M^{-1} + M^{-1}c(1 - z^T c)^{-1}z^T & & \\ & - Sz^T - (1 - z^T c)^{-1}c^T M^{-1} & \\ & - \beta^T - \beta^T c(1 - z^T c)^{-1}z^T & \\ & - (1 - z^T c)^{-1}z^T & \\ - zS - M^{-1}c(1 - z^T c)^{-1} & - & - \\ & S & - \\ \beta^T c(1 - c^T z)^{-1} & RSS & 0 \\ (1 - c^T z)^{-1} & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (11)$$

现将证明扫描算法可以确定 g_1 - 广义逆和 g_2 - 广义逆, 这可以如下直接证得。令以上矩阵前两行和前两列组成的矩阵为

$$V = \left(\begin{array}{cc} M^{-1} + zSz^T + z(1 - c^T z)^{-1}c^T M^{-1} + M^{-1}c(1 - z^T c)^{-1}z^T & - zS - M^{-1}c(1 - z^T c)^{-1} \\ - Sz^T - (1 - z^T c)^{-1}c^T M^{-1} & S \end{array} \right)$$

可以证明它是矩阵 $U = (X \ x)^T (X \ x)$ 的 g_1 - 广义逆和 g_2 - 广义逆, 事实上有:

$$UV = \left(\begin{array}{cc} X^T X & X^T x \\ x^T X & x^T x \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cc} M^{-1} + zSz^T + z(1 - c^T z)^{-1}c^T M^{-1} + M^{-1}c(1 - z^T c)^{-1}z^T & - zS - M^{-1}c(1 - z^T c)^{-1} \\ - Sz^T - (1 - z^T c)^{-1}c^T M^{-1} & S \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{cc} I + c(1 - z^T c)^{-1}z & - c(1 - z^T c)^{-1} \\ z^T + z^T c(1 - z^T c)^{-1}z^T & z^T c(1 - z^T c)^{-1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

容易验证

$$UVU = \left(\begin{array}{cc} I + c(1 - z^T c)^{-1}z & - c(1 - z^T c)^{-1} \\ z^T + z^T c(1 - z^T c)^{-1}z^T & z^T c(1 - z^T c)^{-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} X^T X & X^T x \\ x^T X & x^T x \end{array} \right) = U$$

$$VUV =$$

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cc} M^{-1} + zSz^T + z(1 - c^T z)^{-1}c^T M^{-1} + M^{-1}c(1 - z^T c)^{-1}z^T & - zS - M^{-1}c(1 - z^T c)^{-1} \\ - Sz^T - (1 - z^T c)^{-1}c^T M^{-1} & S \end{array} \right) \\ &\left(\begin{array}{cc} I + c(1 - z^T c)^{-1}z & - c(1 - z^T c)^{-1} \\ z^T + z^T c(1 - z^T c)^{-1}z^T & z^T c(1 - z^T c)^{-1} \end{array} \right) = V \end{aligned}$$

因而, 可直接得到带有给定约束且 SS&CP 矩阵奇异的相应 LS 回归的解:

$$\begin{aligned}\beta &= V(Xx)^T y \\ &= \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} - \\ &\left[\beta + zS_z^T X^T y + z(1 - c^T z)^{-1} c^T \beta + M^{-1} c(1 - z^T c)^{-1} x^T y - zS_x^T y - M^{-1} c(1 - z^T c)^{-1} x^T y \right. \\ &\quad \left. - S_z^T X^T y - (1 - z^T c)^{-1} R c^T M^{-1} + S_x^T y \right] \\ &= \begin{pmatrix} \beta + z(1 - c^T z)^{-1} c^T \beta \\ - (1 - c^T z)^{-1} c^T \beta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

它们正是矩阵(11)式中第三行元素的转置负值。故(1)得证。

第三步: 直接可证得上述解满足约束条件:

$$L\beta = c^T \beta_1 + \beta_2 = c^T \beta + c^T z(1 - c^T z)^{-1} c^T \beta - (1 - c^T z)^{-1} c^T \beta = 0$$

故(2)得证。

3 讨 论

必须注意到, 由本文所描述的 SWEEP 算子变换得到的新矩阵(11)的元素的统计意义, 与 1.4 节非奇异但有约束而增加一行和一列的情况有着相同的解释, 所得的 LS(最小二乘法)估计 β 和用来估计 β 的方差矩阵的广义逆 V 都出现在通常的位置上。

另外还要注意, 用来估计标准误差的剩余平方和(RSS), 在第二步中并未改变在第一步中得到的 RSS (比较矩阵(9)式和矩阵(11)式中的 RSS)。在(9)式中, 该值对应于奇异矩阵情况下无约束的相应的最小二乘估计(LSE), 在第二步考虑插入一约束后, 由于该约束处理为一种识别约束, 故该值保留不变仍为 $RSS^{[6]}$, 且出现在矩阵中它该所在的位置上。

证明的关键是 $c^T(X^T X)^{-1}c$ 、 $(1 - z^T c)(c^T(X^T X)^{-1}c)^{-1}(1 - c^T z)$ 和 $(1 - c^T z)$ 的可逆性, 显然第二个矩阵的可逆性可直接由另两个矩阵的可逆性得到, 而另两个矩阵由假设知是可逆的。特别要强调的是, 该算法的必要条件是每个约束应该至少与一个来自数据矩阵基的变量相关。

本文所述的算法, 可以推广应用在有线性约束的 Gauss-Newton 非线性回归迭代过程的正规方程组的求解问题中^[6], 将在已有工作^[7-17]的基础上进一步进行研究。

参 考 文 献

- Goodnight J H. A tutorial on SWEEP operator. Proc Amer Statistical Association Statistical Computing Section, 1979, 149 ~ 158
- 陈希儒, 王松桂. 近代回归分析. 合肥: 安徽教育出版社, 1987, 196 ~ 202
- Dixon W J. BMDP Statistical Software Manual, California: University of California Press, 1990
- 吕纯濂. 广义逆矩阵的背景和计算. 南京气象学院学报. 1981, 4(1): 112 ~ 120
- Seber G A F. Linear regression analysis. New York: John Wiley, 1977
- Neytchev P N, Ralston M L, Todorov V K. Fitting models to data by REGRESS- PC program system, in: Kasprzak W, Weron A (Eds.), Stochastic Methods in Experimental Sciences. Singapore: World Scientific Publishing, 1990, 322 ~ 331
- 吕纯濂. Logit 判别分析及其应用 (I). 数学的实践与认识, 1983, (2): 58 ~ 64
- 吕纯濂. Logit 判别分析及其应用 (II). 数学的实践与认识, 1983, (3): 59 ~ 66
- 吕纯濂. 用 Newton-Raphson 迭代法解线性 Logit 判别系数超越方程组. 高等学校计算数学学报, 1985, 7(4): 364 ~ 367

10 吕纯濂,陈舜华. 用 Quasi-Newton 迭代法解二次 Logit 判别系数超越方程组. 数值计算与计算机应用, 1987, 8(1): 19~26

11 Lu C L, Mathes H. A Quadratic Logit Discrimination Algorithm in Matrix Form. Computational Statistics Quarterly, 1991, (4): 269~280

12 吕纯濂,陈舜华. 论 Logit 判别分析中极大似然估计的存在性. 南京气象学院学报, 1992, 15(3): 377~385

13 吕纯濂,陈舜华. 逐步 Logit 判别分析. 数理统计与应用概率. 1994, 9(4): 9~16

14 Lu Chunlian, Chen Shunhua. The Logit Regression Model with Errors in Variables and its Calculation. Chinese Journal of Numerical Mathematics and Applications, 1994, 16(4): 29~38

15 吕纯濂,陈舜华. 矩阵语言与多元分析. 北京: 气象出版社, 1994, 14~177

16 吕纯濂,陈舜华. 带有变量中误差的 Probit 回归模型. 系统科学与数学, 1993, 13(4): 338~344

17 吕纯濂,陈舜华. 带有变量中误差的线性模型, 数学的实践与认识, 1994, (1): 6~15

**SWEEP OPERATOR FOR LEAST SQUARE
REGRESSION SUBJECT TO LINEAR
CONSTRAINTS AND SINGULAR SS&CP MATRIX**

L Chunlian

(Department of Basic Courses, NIM, Nanjing 210044)

Abstract This paper presents some properties of the SWEEP operator in the scope of least square regression subject to linear constraints and matrix of sum of squares and cross product (SS&CP) in singular ill conditions. Despite alternative approaches available, the SWEEP algorithm represents one of the most flexible tools due to its simplicity in calculation and statistical implication of the matrix elements involved and, still more importantly, the output interpretation keeps full consistency with the explanation of general output.

Keywords statistical computing, SWEEP operator, least squares, regression analysis