南京气象学院学报
第15卷 第4期
1992年12月
Journal of Nanjing Institute of Meteorology
Vol. 15 No. 4
Dec. 1992

次地转非线性流动与锋生

管兆勇
(南京气象学院)

摘要 在次地转假设下通过解析方法对完整的平流产生的非线性动力效应进行了研究,给出了非线性锋生的必要条件和动量变化的一组解析解。

关键词 次地转,非线性,锋生

在纬度不太低的地区,大气大尺度运动遵守准地转原则[1]。根据这一基本事实,建立了诸如地转动量近似[2]等理论,并利用线性理论对大气中的许多现象进行了成功的解释。但是,对实际大气运动的更细致深入的刻划有赖于对非线性过程的研究。因控制方程中含有完整的平流项,使得问题的研究出现不少困难,所以,获得非线性波解并对解的特性进行研究,仍将有助于我们深入认识大气的复杂动力过程。因此,本文将在次地转假设下对大气运动的一些非线性行为进行一些研究。

1 次地转非线性流动

含有线性摩擦的水平动量方程为

$$\begin{cases} L(u) - fv = -fv_g - au \\ L(v) + fu = fu_g - av \\ L = \dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial x} + v\dfrac{\partial}{\partial y} + \omega\dfrac{\partial}{\partial p} \end{cases} \tag{1}$$

这里 a 取为守恒量,满足 $L(a)=0$。在上式中令

收稿日期:1991—10—12

$$\begin{cases} u = F\cos G \qquad v = F\sin G \\ u_g = H\cos S \qquad v_g = H\sin S \end{cases} \tag{2}$$

$$G - S = \Delta$$

则由(1)式有

$$\begin{cases} \dfrac{1}{F}L(F) = f\dfrac{H}{F}\sin\Delta - a \\ L(G) = -f(1 - \dfrac{H}{F}\cos\Delta) \end{cases} \tag{3}$$

这里 F、G 分别为水平风矢或地转风矢与 x 轴的夹角。由此易见，当压力场与风场基本适应时 $\Delta\sim0$，由梯度风原理，风向角 G 的变化主要取决于 $1-\dfrac{H}{F}$ 的符号(北半球 $f>0$)。亦即 $|\omega\dfrac{\partial}{\partial p}G|<<|L(G)|$ 时，$1-\dfrac{H}{F}$ 决定了迹线曲率半径的符号，因而，超地转运动($F>H$)对应着反气旋式流动，次地转运动对应着气旋式流动($F<H$)，也就是天气图上表现出的某些流型($\dfrac{\partial G}{\partial t}\to0$时)。

在对(1)式的处理中，一般将 $L(u)$ 中的 u 换为 u_g 或将 $L(u)$ 中部分项的(u,v)换成 u_g、v_g 的表达式[2]。在这里，我们给予不同的处理。设有下列极限过程：当 $\vec{V}\to0$ 时，$\vec{V}_g\to0$，且 $\vec{V}_g\to0$ 的阶数不低于 $\vec{V}\to0$ 的阶数。这样可设

$$u_g = \varepsilon_0 u \qquad v_g = \delta_0 v \tag{4}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{H}{F}(\cos\Delta + \mathrm{tg}G\sin\Delta)$$

$$\delta_0 = \frac{H}{F}(\cos\Delta - \mathrm{ctg}G\sin\Delta) \tag{5}$$

虽然当 $\Delta\to0$ 时，$\varepsilon_0=\delta_0$，且 ε_0、δ_0 有限非零，作为近似，设

$$L(\varepsilon_0) = 0 \qquad L(\delta_0) = 0 \tag{6}$$

这是一个较强的假设条件，它规定了在一定的时段$[t_0,t_N]$之内，质点或流体要么是超地转运动，要么是次地转运动。取 f 平面近似 $f\approx f_0$，则(1)式成为

$$L(u) + (\delta_0 - 1)f_0 v + au = 0$$

$$L(v) + (1 - \varepsilon_0)f_0 u + av = 0 \tag{7}$$

针对气旋式运动，取

$$\varepsilon_0 > 1 \qquad \delta_0 > 1 \tag{8}$$

而当 $\varepsilon_0=1=\delta_0$ 时为地转运动；$\varepsilon_0<1$，$\delta_0<1$ 时为超地转运动；$\varepsilon_0=0=\delta_0$ 时为惯性振荡运动。命

$$\upsilon^2 = f_0^2(1-\varepsilon_0)(1-\delta_0) > 0 \tag{9}$$

则(7)式的解为

$$u = e^{-at}[A\cos\upsilon t + B\sin\upsilon t] \qquad v = \frac{\upsilon}{f_0(\delta_0 - 1)}e^{-at}[A\sin\upsilon t - B\cos\upsilon t] \tag{10}$$

这里 A、B 为积分常数。

要获得与(7)式相应的运动场,只要将积分常数 A、B 变成(x,y)的函数即可。这种做法实质上是从拉格朗日观点向欧拉观点的转换,从描述质点到描述场具有鲜明的物理意义。它既不同于解平流方程时的特征线方法[3],也不同于设定相函数再求解方程(如 KdV 方程)的方法。这里称这种方法为守恒量代换法。具体做法如下:

将(7)式直接积分,有

$$\begin{cases}\alpha_1 = u + ax + f_0(\delta_0 - 1)y \\ \alpha_2 = v + f_0(1-\varepsilon_0)x + ay\end{cases} \tag{11}$$

显然 α_1、α_2记录了每一质点的历史信息。设 u、v 的初始场为 $u|_{t=0}=u_0(x_0,y_0)$,$v|_{t=0}=v_0(x_0,y_0)$,则由(11)式解出

$$x_0 = m(\alpha_1,\alpha_2), \qquad y_0 = n(\alpha_1,\alpha_2) \tag{12}$$

于是(10)式中的 A、B 写成

$$\begin{cases}A = u_0(x_0,y_0) = A_*(\alpha_1,\alpha_2) \\ B = -\dfrac{1}{\upsilon}f_0(\delta_0 - 1)v_0(x_0,y_0) = B_*(\alpha_1,\alpha_2)\end{cases} \tag{13}$$

于是得到非线性偏微分方程组(7)的全场解,从而给定一点(x,y),就得到 u,v 在该点的变化,从此得知全场的演变。(10)式可写成

$$\begin{cases}u = e^{-at}[A_*(\alpha_1,\alpha_2)\cos\upsilon t + B_*(\alpha_1,\alpha_2)\sin\upsilon t] \\ v = \dfrac{\upsilon}{f_0(\delta_0 - 1)}e^{-at}[A_*(\alpha_1,\alpha_2)\sin\upsilon t - B_*(\alpha_1,\alpha_2)\cos\upsilon t]\end{cases} \tag{14}$$

由此,有下列讨论

(1)周期 惯性振荡的周期是$2\pi/f_0$,而对于次地转运动,振动周期是$\frac{2\pi}{\upsilon}$,当$(\delta_0-1)(\varepsilon_0-1)<1$时$\frac{2\pi}{\upsilon}>\frac{2\pi}{f_0}$,而$(\varepsilon_0-1)(\delta_0-1)\geqslant 1$时,$\frac{2\pi}{\upsilon}\leqslant\frac{2\pi}{f_0}$。故 u、v 局地变化的周期取决于次地转的程度。对于初始时刻 u_0、v_0有水平不均匀的情况,当 $a=0$且 ε_0、δ_0是常数时,某空间点上 u、v 虽不具有简谐振动,但有主周期$\frac{2\pi}{\upsilon}$。而 ε_0,δ_0不是常数或不满足(6)式时,某点上 u、v 的变化将复杂得多。

(2)场的演变 对于已知的 ε_0、δ_0和初始场 u_0、v_0,相应的流场随时间的演变不会呈现出简单的波的平移,而是将产生形变。由(11)、(14)式有

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})[L(\alpha_1),L(\alpha_2)]^T=0 \tag{15}$$

这里 T 表示转置，而

$$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial A_\cdot}{\partial\alpha_1}\cos\nu t+\dfrac{\partial B_\cdot}{\partial\alpha_1}\sin\nu t & \dfrac{\partial A_\cdot}{\partial\alpha_2}\cos\nu t+\dfrac{\partial B_\cdot}{\partial\alpha_2}\sin\nu t\\ b\dfrac{\partial A_\cdot}{\partial\alpha_1}\sin\nu t-b\dfrac{\partial B_\cdot}{\partial\alpha_1}\cos\nu t & b\dfrac{\partial A_\cdot}{\partial\alpha_2}\sin\nu t-b\dfrac{\partial B_\cdot}{\partial\alpha_2}\cos\nu t\end{bmatrix}e^{-\alpha t} \tag{16}$$

$$b=\nu/[f_0(\delta-1)]$$

矩阵 A 充分体现了不均匀初始场带来的影响。显然，要使得 $|L(\alpha_1)|+|L(\alpha_2)|=0$，必有条件

$$\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\neq 0 \tag{17}$$

我们称 $\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 为条件行列式。它保证 α_1、α_2 在 Largrange 观点下守恒，保证 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial u}{\partial t}$ 等有限。当条件(17)式不成立时，u、v 的一阶时间或空间偏导数的绝对值将变得很大。

2 非线性锋生

有关锋生的研究已有很多，例如定义锋生函数来研究锋生因子，非定常基本流中的锋生与 Eady 波之关系[4]。但用含有完整平流作用的方程组来解析地讨论锋生并不多见。同时，从大气内部动力过程来说明非线性锋生亦是与经典的锋生理论探讨所不同的一条途径。由上列理论分析知，当 $\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\to 0$ 时，要素的时间及空间的一阶偏导数在某些地区趋于无限，这与锋面附近的要素变化相吻合。若 E 表示任一气象要素，则 $|\frac{\partial E}{\partial t}|\to\infty$ 或 $|\frac{\partial E}{\partial x}|\to\infty$ 的过程也正好相应于锋生过程。这里我们给出位温及水汽分布的关系式

$$\begin{cases}\theta=\Theta_\cdot(\alpha_1,\alpha_2)+\dfrac{1}{c_p}\displaystyle\int\left(\frac{p}{p_{00}}\right)^{\frac{R}{c_p}}Q\,dt\\ q=H_\cdot(\alpha_1,\alpha_2)+\displaystyle\int E\,dt\end{cases} \tag{18}$$

其中 $\Theta_\cdot$ 和 $H_\cdot$ 是由 θ 及 q 的初始场定出的函数。Q 和 E 分别为加热函数和相变函数，表征强迫源或汇。由此知，若 θ 及 q 在初始时刻分布不均匀，而 $Q=0$、$E=0$，则当 $t\to\infty$ 的过程中使 $\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\to 0$ 时，必有位温及水汽时空变化的不连续。因为在

$$\nabla\theta = \frac{\partial\Theta_{\cdot}}{\partial\alpha_1}\nabla\alpha_1 + \frac{\partial\Theta_{\cdot}}{\partial\alpha_2}\nabla\alpha_2 = \frac{\partial\Theta_{\cdot}}{\partial\alpha_1}[\nabla u + \nabla(ax) + \nabla(f_0(\delta_0 - 1)y)]$$
$$+ \frac{\partial\Theta_{\cdot}}{\partial\alpha_2}[\nabla v + f_0\nabla((1-\varepsilon_0)x) + \nabla(ay)] \tag{19}$$

中，$|\nabla u| + |\nabla v|$在某时间某空间点上非常之大。根据一维情况，这种不连续通常出现在压缩区[3]。在具有旋转效应的流体中，由(11)、(14)、(16)式可求出水平散度为

$$\nabla\cdot\vec{V} = C/\det(I-A)$$

$$C = [a(b\frac{\partial A_{\cdot}}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial B_{\cdot}}{\partial\alpha_1}) + f_0(1-\varepsilon_0)\frac{\partial B_{\cdot}}{\partial\alpha_2} + f_0 b(\delta_0 - 1)\frac{\partial A_{\cdot}}{\partial\alpha_1}]\sin\nu t$$
$$+ [a(\frac{\partial A_{\cdot}}{\partial\alpha_1} - b\frac{\partial B_{\cdot}}{\partial\alpha_2}) + f_0(1-\varepsilon_0)\frac{\partial A_{\cdot}}{\partial\alpha_2} - f_0 b(\delta_0 - 1)\frac{\partial B_{\cdot}}{\partial\alpha_1}]\cos\nu t \tag{20}$$

由此应可说明 $\det(I-A)\to 0$时所决定的$\nabla\cdot\vec{V}$的符号。但是，需要通过数值计算才能得到结果。如果θ、q的初始场确定的$\Theta_{\cdot}(\alpha_1,\alpha_2)$和$H_{\cdot}(\alpha_1,\alpha_2)$为常量或为零，锋生过程将取决于加热和相变。若延迟初始时刻，则这种加热和相变实际上还是给出了一个非均匀初始场，然后再通过非线性平流产生锋生。

同样，涡度、动能的时间空间变化等均有这样的特点。需要指出，要素的时空变化可以不连续，但要素本身具有有限的量值，且不可能无限增长。

3 结　语

通过以上理论分析，我们知道非线性效应在一个具有一定假设之下的模式中可被解析地得到完整的考虑。保证隐式解满足原方程的条件与初始场有关。而平流非线性可能产生解的时空一阶导数的无限，与这种非线性波解相应的大气内部非线性动力过程可以迫使非均匀分布的温、湿场内产生通常所指的锋面。这是一种直接的描述和具有实际意义的解释。本文给出了求解(7)式全场解的方法和通解成立的条件行列式。但是，由于解析解的复杂性，更具体细致的结构刻划需要在特殊的初始场(如假设$u|_{t=0}$是(x_0,y_0)的极为简单的函数)或数值积分计算的情况下才能进行。由(4)式，(u_g,v_g)的变化应与(u,v)的变化具有一定的对应规律，亦即锋面附近的压力梯度力与风场之间的关系由(4)式约束。压力场的不连续是二阶不连续。

参 考 文 献

1 Добрышман EM 著,蒋金荣等译.赤道大气动力学,北京:气象出版社,1987,34

2 Hoskins BJ. *JAS* 1975;32;233—242

3 Whitham GB. *Linear and Nonlinear Waves,John Wiley and Sons,Inc.* 1974

4 Blumen W. *JAS*,1979;36;3—11

SUBGEOSTROPHIC NONLINEAR FLOW AND FRONTOGENESIS

Guan Zhaoyong

(Nanjing Institute of Meteorology)

Abstract The nonlinear dynamic characteristics of advection are studied for subgeostrophic motion. And the necessary conditions for nonlinear frontogenesis are obtained from analytical solution describing the variation of horizontal momentum.

Key words subgeostrophy,nonlinearity,frontogenesis